R

~~Phys. Aron~~ Math. P. 489 d.

Krücker

Mathesis. Systemata & methodi

129.

R

Erläuterungen

der

Kästnerischen

Anfangsgründe

der

Mechanischen und Optischen Wissenschaften

von

Christian Heinrich Ernst Rücker.

Nebst einer

Vorrede

vom

Herrn Hofrath Kästner.

Mit 3 Kupfertafeln.

Leipzig,

im Schwickertschen Verlage. 1795.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Herrn Dü Hamel
Verfahren
das
Gewicht eines Kubikfusses Wasser zu finden;
dargestellt
von
Abraham Gotthilf Kästner.

Herr Rücker übersandte mir seine Erläuterungen über meine Anfangsgründe der mechanischen und optischen Wissenschaften im Manuscripte. Ich konnte nicht anders urtheilen, als: eine Bemühung, die Er für seinen Unterricht nützlich gefunden hatte, könne auch Mehrern dienen. Daß

solches durch den Abdruck seiner Arbeit bewerkstelliget wird, macht mir Vergnügen.

Denen, welche dieses Werk brauchen wollen, nutze ich, statt alles andern, das ich hier noch sagen könnte, vielleicht mehr, wenn ich einen Versuch mittheile, das Gewicht eines Kubikfusses Wasser zu erfahren. Er findet sich in der Vorrede der **Anfangsgründe der Schiffbaukunst, aus dem Französischen des Herrn Dü Hamel de Monceau, übersetzt von C. G. D. Müller, Capitain des K. Großbr. und Churfürstl. Br. L. Wachtschiffes auf der Elbe.** Berlin, 1791. Die Erfahrung kann Vielen lehrreich seyn, denen Anfangsgründe der Schiffbaukunst entbehrlich sind; ich habe die Berechnungen darüber mehr aus einander gesetzt, als der Urheber des Versuchs gethan hat.

Dü Hamel ließ einen Würfel von Holz verfertigen, der genau einen pariser Kubikfuß hielt. Damit das Holz kein Wasser einsaugte, ließ er es mit Oelfirniß mehrmals dünn überstreichen, und dann, die Dicke zu vermindern, wiederum mit Bimstein abschleifen.

Des Würfels Gewicht in freyer Luft fand er 33 Pfund, 1 Unze, 3 Gros.

Das Pfund hat 16 Unzen, die Unze 8 Gros.

Nun befestigte er an zwo entgegengesetzten Flächen des Würfels, an jeder drey Kupferdräthe, an der obern den Würfel an den Waagebalken zu hengen, an der untern eine Last an ihn zu hengen, die ihn im Wasser niederziehen sollte. Wie tief, war an den obern Dräthen bezeichnet.

Er senkte Dräthe und Last bis an das Zeichen ins Wasser – ohne den Würfel versteht sich, – da wog es zusammen 43 Pfund, 12 Unzen, 1 Gros. Das Gewicht in freyer Luft giebt er nicht an.

Würfel, Dräthe und Last, bis an das Zeichen ins Wasser gesenkt, wogen zusammen 7 Pfund, 4 Unzen.

Daraus findet er den Kubikfuß Wasser 69 Pfund, 9 Unzen, 4 Gros.

Der Versuch ward im Anfange des März 1752 angestellt, das Barometer 28 Zoll, und der Spiritus des reaumürischen Thermometers 6 Grad über Null.

Das Wasser ist nicht weiter bestimmt, als daß es süsses war.

Hierüber läßt sich so rechnen.

Ein Körper, dessen Raum $= M$, (der Würfel) hat in der Luft das Gewicht $= p$

Ein Körper, dessen Raum $= N$, (Dräthe und Last) hat im Wasser das Gewicht $= q$

Man verbindet beyde so, daß aus ihnen ein Ganzes entsteht, dessen Raum $= M + N$ (wie Hydrost. 61)

Dieses Ganze hat im Wasser das Gewicht $= r$.

Das Gewicht des Ganzen im Wasser besteht ohne Zweifel aus den Gewichten, die der Theil M und der Theil N im Wasser haben.

Es könnte auch kleiner seyn, als das Gewicht des Theils N im Wasser; wie ein Ganzes aus Kork und Bley im Wasser schwimmen kann, wenn das Bley allein untersänke.

Findet so etwas statt; ist im Wasser das Gewicht des Ganzen kleiner, als das Gewicht des Theils N, so muß das Gewicht des Theils M im Wasser, **verneint** seyn. Er muß in freyer Luft weniger Gewicht haben, als das Wasser, dessen Raum er einnimmt.

Nun giebt der Satz: im Wasser, Gewicht des Ganzen = Gewicht des Theils M + G. d. Th. N die Folge.

Gewicht des Theils M = Gewicht des Ganzen - Gewicht d. Th. N, $= r - q$

Von seinem Gewichte in freyer Luft verliert der Theil M so viel, als das Wasser wiegt, dessen Raum er einnimmt.

Weil aber sein Gewicht in freyer Luft $= p$ war, und im Wasser $= r - q$; so verliert er im Wasser $p - (r - q)$

$= p + q - r$; das ist, das Gewicht des Wassers, dessen Raum er einnimmt.

Das läßt sich auch so finden.

Das Gewicht des Wassers, dessen Raum der Theil M einnimmt, heisse $= x$; so ist sein Gewicht im Waßer $= p - x$ des Theils N Gew. im Wasser $= q$

Also $r = q + p - x$ und $x = p + q - r$.

Für den Versuch

p =	33 Pfund,	1 Unze,	3 Gros
q =	43	12	1
	76	13	4
r =	7	4	
x =	69	9	4

So viel beträgt nach dem Versuche das Gewicht eines pariser Kubikfusses süssen Wässers, in pariser Pfunden, Unzen und Gros.

In Decimaltheilen ist

Unze = $\frac{1}{16}$ Pfund = Pf. 0,0625 Gros = $\frac{1}{8}$ Unze. 0,125 = Pfund. 0,0078125

Daher, in Pfunden

1 Unze = 0,0625
3 Gros = 0,0234375

p = 33,0859375

9 Unzen = 0,5625
4 Gros = 0,03125

p + q − r = 69,59375

So giebt die letzte Zahl das Gewicht eines Kubikfusses Wasser in Decimaltheilen des Pfundes an.

Die eignen Schweren des Wassers und des Holzes mit einander zu vergleichen, nehme ich statt der gefundnen Zahlen ihre nächsten Werthe bis auf Tausendtheile. Die Versuche versprechen keine größere Genauigkeit, da die

Gewichte nur bis auf Gros, im uns gewöhnlichern Ausdrucke: Quentchen, angegeben sind.

So finden sich die Verhältnisse der eignen Schweren von Wasser und Holz

$$\log 69,594 = 1,8425718$$
$$\log 33,086 = 1,5196443$$

$$0,3239275$$
$$0,6770725 - 1$$

Der erste der beyden gefundenen Logarithmen ist der kleinere beyder gegebenen, vom größern abgezogen. Der zweyte ist das Gegentheil von vorigen. Jener zeigt, des Wassers eigne Schwere sey = 2,1034 des Holzes seiner; dieser, des Holzes eigne Schwere sey = 0,47541 des Wassers seiner.

Das größte Gewicht, das Dû Hamel bey seinem Versuche brauchte, ist q; des Theils N Gewicht in freyer Luft giebt er nicht an. Man sieht auch leicht, daß es sich

aus dem angegebenen nicht berechnen läßt. Man nenne es $=t$; so sind Gewichte von:

M + N in Luft	— p + t in Wasser	$= r$
N	t	q
M	p	$q - r$

Und der Verlust im Wasser ist

bey $N; = t - q$

$M = p + q - r$

$M + N = t + p - r$

Wo t allemal aus der Rechnung geht, wie man es auch anfängt.

Größer muß t seyn, als q; seine Größe aber kömmt auf den Raum an, den die Materie einnimmt, aus welcher N besteht. Nach Dü Hamels Figur scheint N ein großes Gewicht, etwa von Bley, gewesen zu seyn.

Vermuthlich hat Dü Hamel, t nicht einmal gesucht. Die Absicht der Vorrichtung zu seinem Versuche war ohne

Zweifel, das Gewicht eines Kubikfusses Wasser wirklich zu finden, nicht aus dem Gewichte eines kleinern Raums voll Wasser zu schlüßen; und doch dazu nicht so viel Gewicht anzuwenden, als ein Kubikfuß Wasser wiegt.

Wollte man in einem Gefässe, daß einen Kubikfuß hält, Wasser wiegen, so braucht man soviel Gewicht mehr als das Gefäß hat.

Noch vielmehr, wenn man einen Kubikfuß machte, der für sich im Wasser untersänke, und nun suchte, wie viel er im Wasser verliert.

So kam Dü Hamel vermuthlich auf die Gedanken, einen Kubikfuß aus einer leichtern Materie zu machen, als Wasser ist, und durch angehengte Last ihn zu senken.

Eigentlich wollte er, zur Anwendung auf die Schiffarth, das Gewicht eines Kubikfusses Seewasser wissen, worüber die Angaben, zwischen 72 und 74 Pfund schwankten. Da er selbst kein Seewasser hatte, veranlaßte er Hrn. Choquet zu Brest, die Gewichte von Seewasser und von süssem Wasser zu erforschen, die beydes eine und dieselbe

große gläserne Flasche anfüllten. Sie fanden sich 51 Pf. 8 Unzen, 6 Gros, und 50 Pf., 4 Unzen, 2 Gros. Also, alles zu Gros gemacht und die Zahlen halbirt, das Verhältniß der eignen Schweren = 3299 : 3217.

Weil aber der kubische Inhalt der Fläche nicht bekannt war, suchte Dü Hamel noch das Gewicht eines Kubikfusses süssen Wassers; und rechnet nun so: wie 50 Pf. 4 Unzen, 2 Gros zu 69 Pfund, 9 Unzen, 2 Gros, so 51 Pfund, 8 Unzen, 6 Gros zu 71 Pfund, 5 Unzen, 7 Gros, 4 Graius.

Diese Regel Detri mag ich nicht nachmachen. Ich rechne aber so:

Die eignen Schweren von süssem Wasser und von Seewasser verhalten sich = 3217 : 3299

$$= 1 : 1 + \frac{82}{3217}$$

Nun log 82 = 1,9138139

log 3217 = 3,5074511

0,4063628 − 2

Giebt das Verhältniß $= 1 : 1,025489$

Ferner: Wenn das Gewicht eines Kubikfusses füsses Wasser $= x$; so ist das Gewicht eines Kubikfusses Seewasser $= x + \frac{82}{3217} \cdot x$

Vorhin ist $x = p + q - r$ gefunden. Ich habe auch schon einen Logarithmen gebraucht, für eine Zahl, die dieser sehr nahe kam. Nicht als ob ich es zu gegenwärtiger Rechnung für nöthig hielte, sondern nur zu zeigen, wie weit sich die Bequemlichkeit der Logarithmen erstrecken läßt, will ich den Logarithmen für die Zahlen selbst hersetzen, vermittelst Proportionaltheile aus Shervin's oder ähnlichen Tafeln. (Meiner astronomischen Abhandlungen 11. Samml. 4. Abth. 23 u. f. S.)

$$
\begin{array}{ll}
\log 69,593 = & 1,8425656 \\
\text{Propth. für } 7 = & \quad\quad 44 \\
\quad \ldots\ldots 5 & \quad\quad\ \ 3 \\
\hline
\log 69,59375 = & 1,8425702 \\
\log \frac{82}{3217} = & 0,4063628 - 2 \\
\hline
 & 0,2489331
\end{array}
$$

$$\text{giebt } \frac{82}{3217} \cdot x = 1{,}773916$$

$$\text{Nun } \quad x \quad = 69{,}59375$$

$$\text{also} = 71{,}36766$$

für das Gewicht eines Kubikfusses Seewasser.

Die Decimaltheile des Pfundes verwandle ich folgendergestalt in Gros

$$\log 0{,}36766 = 0{,}5654464 - 1$$

$$\log 128 \quad = 2{,}1072100$$

$$1{,}6726564$$

giebt 47,0605 Gros = 5 Unzen 7,0605 Gros.

Nun ist Gros = 72 Grains, und 0,0605 . 72 = 4,356; Also das Gewicht eines Kubikfusses Seewasser = 71 Pf. 5 Unzen, 7 Gros, 4,356 Grains.

Die gegebenen Grössen für vollkommen richtig angenommen, findet sich durch die Logarithmen das Gesuchte, sogar noch schärfer, als Dú Hamel es angiebt: Ob leichter? das mag der versuchen, der das fragt.

Sind in einer geometrischen Proportion, deren vierte Zahl man sucht, die beyden gegebenen Glieder des ersten Verhältnisses nicht sehr unterschieden, so kann man diese Verhältnisse so ausdrücken, daß ihr vorhergehendes Glied = 1; da besteht dann die vierte Zahl aus der dritten, und etwas dazu addirt oder davon abgezogen, das man leicht berechnet, und so das Gesuchte bequemer und schärfer findet, als nach der gewöhnlichen Regel Detri. Hiebey lassen sich besonders die Logarithmen vortheilhaft anbringen. Man sehe meine Fortsetzung der Rechenkunst, VII. Cap. 1. 8 und VIII. Cap. V. Abschnitt.

Die Mechanik,

oder eigentlich

die Statik.

1.

Wenn zwei Kräfte so gegen einander angebracht sind, daß eine die andere aufhebt, oder die eine die Wirkung der andern verrichtet, so erfolgt Ruhe, oder ein Gleichgewicht. Eine Untersuchung, wie groß die Kraft sey, welche die Wirkung einer andern gegebenen Kraft aufhebt, gehört in die Statik. Ueberwältigt eine Kraft die andere, so erfolgt Bewegung, und untersucht man die Größe der überwältigenden Kraft, so gehört diese Untersuchung in die Mechanik.

8.

Es sind Gewicht und Schwere von einander unterschieden. Schwere, das heist, ein Bestreben in einer senkrechten Linie auf die Horizontalebenen zu fallen, hat ein jeder Körper. Ein gleich großes Bestreben von der Art haben aber nicht alle Körper. Die Summe der Bestreben aller Theilchen des Körpers aber heist das Gewicht desselben.

z. B. wenn man zwei gleich große Stücken Metall, eins von Blei, das andere von Zinn hat; das von Blei wiege 1 Pfund, so wird das von Zinn nicht ein ganzes Pfund, sondern etwas weniger wiegen. Die Kraft, welche man anwenden muß, jedes dieser Stükken zu halten, muß dem Bestreben zu fallen gleich seyn. Hat man nicht so viel Kraft, ein Stück vor dem Falle zu sichern, so ist unsere Kraft dem Bestreben zu fallen nicht gleich. Hat man noch überflüssige Kraft zu halten, so wendet man doch nicht mehr an, als gerade erfodert wird, den Körper zu erhalten. Da das Zinn, welches gleiche Größe mit dem Blei hat, nicht so viel wiegt, so hat man auch nicht so viel Kraft nöthig das Zinn zu halten, als beim Blei erfodert wurde. Folglich ist das Bestreben des Bleies, nach einem Perpendikel auf die horizontale Fläche zu fallen, größer, als das des Zinnes, und daher sind die **Gewichte** der beiden Stücken Metall verschieden.

Das Gewicht eines gewissen Stücks von einer Masse, z. B. eines Kubikfußes, oder Kubikzolles u. s. w. heist das **eigenthümliche Gewicht** dieses Stücks, oder nach dem Sprachgebrauche, die **eigenthümliche Schwere, eigene Schwere.**

Wenn ein Stück Blei 802 Pfund und 2 Unzen wiegt, so wiegt ein gleich großes Stück Zinn 516 Pfund und 2 Unzen, und man sagt, die eigne Schwere des Bleies verhält sich zur eignen Schwere des Zinnes (die Pfunde mit 16 zu Unzen gemacht, weil 16 Unzen = 1 Pf. sind) wie 12834 : 8258, oder mit 2 in beide Glieder der Verhältnisse dividirt, wie 6417 : 4129.

10.

Ein Kubikzoll Blei ist schwerer, als ein Kubikzoll Holz. Daher ist Blei dichter, als Holz.

11.

Man nehme einen Kubikzoll Blei und wiege ihn, dann auch zwei Kubikzoll, so werden diese 2 Kubikzoll gerade noch einmal soviel, als 1 Kubikzoll wiegen. Aber 2 Kubikzoll sind auch noch einmal so groß, oder nehmen noch einmal so viel Raum ein, als einer; folglich verhalten sich die Gewichte der beiden Mengen Blei, wie die Räume, welche sie einnehmen. Ist daher der Raum einer gewissen Menge Materie noch einmal so groß, als der einer andern, so muß auch das Gewicht der ersten Menge noch einmal so groß seyn, als das Gewicht der andern.

18.

Es trägt A das Gewicht P und Q, weil aber $P = Q$, so trägt H $2P = 2Q$.

19.

Wenn ein Gleichgewicht erfolgen sollte, so müßten an B und C gleiche Gewichte angehängt werden. Hinge man aber statt P ein Gewicht S an, das größer wäre, als P, so müßte C steigen; weil das kleinere Gewicht Q dem größern S das Gleichgewicht nicht halten kann, da unter den nemlichen Umständen, unter welchen Q und P im Gleichgewichte waren, nicht auch Q und S es seyn können.

20.

Weil die beiden Fäden erst bei A und B von der Scheibe abgehen, so ist es so gut, als wären

sie blos bei A und B befestiget, und die Linie AB bewege sich um C, wo alsdann alles wieder eben so ist, wie in 16, folglich müssen die beiden Gewichte P und Q wieder im Gleichgewichte seyn.

21.

Es sey unter den Umständen, wie in 16 und 20, Q = P, man hänge auf der einen Seite Q an, und auf der andern P + R, so hält Q wohl dem P das Gleichgewicht, aber nicht dem R mit. Es ist also nichts, was dem R Widerstand leistet, dieses muß also sinken. Wenn z. B. Q = 2 Pf.; P = 2 Pf.; R = 1 Pf., so hält 2 Pf. dem 2 Pf. das Gleichgewicht, aber das 1 Pf. hält nichts vom Niedersinken zurück. Daher neigt sich der schwerere Theil mit der Last von 1 Pf.

22.

Es sey der Punkt M eben so weit vom Mittelpunkte entfernt, als der Punkt N. Um die Richtungen MF und NG hervorzubringen, können die Fäden bei F und G über kleine Rollen gehen. Unter diesen Umständen darf, wenn H = K, sich die Rolle nicht drehen.

26.

Wenn sich der Ruhepunkt fig. 1. zwischen der Last und der Kraft befindet, so heist der Hebel vectis heterodromus. Wär aber bei B die Last, bei A zöge die Kraft aufwärts nach R, und bei C befände sich der Punkt, wo der Hebel aufliegt, oder sonst befestigt ist; oder man stelle sich vor, bei A liege etwas auf dem Hebel, bei B sey er von jemandes Achsel unterstützt, und endlich bei C sey der befestigte Punkt, oder der Ruhepunkt, so heist der Hebel vectis homodromus.

27.

Man denke sich DACB fig. I. der Erläuterungen als eine gerade unbiegsame Stange ohne Schwere, welche sich um A drehen lasse, so daß sie weder unter noch über A kommen kann, welches man durch einen Bolzen, der durch die Stange bei A ginge, bewerkstelligen kann; es sey DA = AC = CB; an B hänge man P an, und in C lasse man +F aufwärts ziehen. Diese beiden Gewichte werden im Gleichgewichte seyn, wenn +F = 2 P (18) und sich der Hebel von A nicht entfernen kann. +F muß nemlich so groß seyn, als P+ der Widerstand, der in A geleistet wird, und eben so groß als P ist. Folglich + F = 2 P.

In C hänge man - F = +F an, so daß es dem + F entgegen wirkt; dieses wird mit einem gleichen Gewichte Q, welches in D angehängt ist, im Gleichgewichte seyn (16). Weil an diesem Hebel der erstern Art alles auf der einen Seite ist, wie auf der andern. Da aber - F und + F einander gerade entgegen wirken, so hebt eine Wirkung die andere auf. Daher ist es eben so gut, als wären diese beiden Gewichte nicht an dem Hebel angebracht worden, oder + F - F = o. Der Hebel aber ist doch im Gleichgewichte, deswegen muß P in B, dem Q in D das Gleichgewicht halten, obgleich die Gewichte ungleich und in verschiedenen Entfernungen angebracht sind.

28.

Wenn eine Kraft = P bei B aufwärts zieht, so ist sie mit - F = 2 P im Gleichgewichte. Eine Kraft aber, welche in D aufwärts zieht, thut eben

das, den Hebel um A nach der nemlichen Richtung wie $-F$ zu drehen, wenn sie $= -F$; daher muß auch eine Kraft $= -F$ in D aufwärts ziehend, mit der Kraft, welche in B aufwärts zieht, im Gleichgewichte seyn.

30.

Wenn $CB = AC$, oder $AB = 2\,AC$, und sich der Hebel um A dreht, so ist, wenn $+F = 2R$, der Hebel der zweiten Art im Gleichgewichte.

Denn wenn man an A ein Gewicht $O = P$ hängte, so müßte ein Gleichgewicht erfolgen (16); und den Hebel in C zu halten, müßte eine Kraft $+F$, die der $P + O$ gleich wäre, angehängt werden. Weil aber $P = O$, so ist $+F = 2\,P$. Nimmt man O weg, so drückt der Bolzen in A auf den Hebel so stark, als O zog, und muß also noch immer im Gleichgewicht seyn, obgleich $+F$ in der einfachen, und P in der doppelten Entfernung vom Ruhepunkte wirken.

P ist mit $Q = 2\,P$ im Gleichgewichte, obgleich P vom Ruhepunkte in der einfachen und Q in der doppelten Entfernung ist (27). Also ist die Behauptung: **daß eine Kraft in der doppelten Entfernung vom Ruhepunkte, einer doppelt so großen in der einfachen Entfernung, das Gleichgewicht halte**, von den Hebeln beider Arten wahr.

31.

Man nehme $n = 2$; $P = 1$ Pf.; $AC = 1$ Fuß an, und es ist $+F$ mit P im Gleichgewichte, wenn $+F = n \,.\, P = 2$ Pf. um $AC = 1$ Fuß, und P um $AB = n \,.\, AC = 2$ Fuß vom Ruhepunkte entfernt ist, so muß auch $R = (n + 1)\ P = (2 + 1)$

Pf. = 3 Pf., wenn es um AC = 1 Fuß vom Ruhepunkte D, mit P, welches um DB = (n + 1) AC = (2 + 1) Fuß = 3 Fuß von D entfernt ist, das Gleichgewicht halten.

Wenn + F = n P = 2 Pf. mit P = 1 Pf. das Gleichgewicht hält, da + F um AC = 1 Fuß und P um n . AC = 2 Fuß vom Ruhepunkte entfernt ist, so hänge man in der Entfernung AD = AC = 1 Fuß das Gewicht Q = + F = n . P = 2 Pf. an, welches nach 27 dem P das Gleichgewicht halten wird. Es trägt nun aber der Ruhepunkt A den ganzen Hebel, also eine Last = Q + P = n . P + P = (n + 1) P = (2 + 1) Pf. = 3 Pf. Man lasse also eine Last R, in A aufwärts ziehen, diese muß so viel als Q + P betragen, oder R = (n + 1) P, oder R = 3 Pf. Man verändere den Ruhepunkt A, und befestige den Hebel in D, so kann Q weggenommen werden, und die Ruhe wird auch bleiben müssen. Es ist also nun R = 3 Pf. vom Ruhepunkte D um AD = AC = 1 Fuß, und P = 1 Pf. von D um AB + AD = n . AC + AC = (n + 1). AC = (2 + 1) Fuß = 3 Fuß entfernt.

32.

Wenn in fig. II. der Erläut. bei D der Ruhepunkt ist, so ist der Hebel DB in Ruhe, also P mit R im Gleichgewichte (31). Macht man DE = AC = 1 Fuß, und hängt an E ein Gewicht S = R = (n + 1) P = (2 + 1) Pf. = 3 Pf., so muß S die nemliche Wirkung thun, wie R, nemlich beide den Hebel gleich stark nach einerlei Richtung drehen. Daher ist S = (n + 1) P = 3 Pf. in der Entfernung DE = 1 Fuß, mit P = 1 Pf. in

der Entfernung DB = (n + 1) AC = 3 Fuß vom Ruhepunkte, im Gleichgewichte.

34.

Wenn sich beim Hebel der ersten Art DAB die Gewichte Q und P zu einander verhalten, wie ein Paar ganze Zahlen m : n; oder wenn m = 4, n = 2, wie 4 : 2, und eben so sich die umgekehrten Entfernungen der Gewichte vom Ruhepunkte verhalten, das ist so AB : AD, daß folglich Q : P = m : n = AB : AD, so erfolgt ein Gleichgewicht.

Man nehme AC .... Gleichgewicht seyn.

AB sey m mal so groß, als AC, oder AB sey 4mal so groß, als AC, folglich $AC = \frac{1}{m} AB = \frac{1}{4} \cdot AB$, so muß, wenn + F = m . P = 4 Pf. in C in die Höhe, und P = 1 Pf. in B hingegen niederwärts zieht, ein Gleichgewicht erfolgen; indem P so vielmal so weit vom Ruhepunkte sich befindet, wie + F, so vielmal + F so groß, wie P ist (33).

Es ist aber $- F \ldots \frac{n}{m} AB$

$+ F = - F = mP$; auch ist $P = \frac{n}{m} \cdot Q$ gefunden worden, daher ist, wenn $P = \frac{n}{m} Q$ auf beiden Seiden mit m multiplizirt wird

$$- F = m . P = m . \frac{n}{m} \cdot Q$$

$$- F = \frac{m . n}{m} \cdot Q = m . P$$

$$- F = n . Q = m . P$$

da nun $-F = nQ$, so halten sie in gleichen Entfernungen vom Ruhepunkte einander das Gleichgewicht (16). Man will aber nicht wissen, wo nQ soll angehängt werden, sondern man sucht die Entfernung vom Ruhepunkte für Q. In 33 wird erfodert, daß die Entfernung des Q vom Ruhepunkte A, $AD = n . AC$ seyn sollte. Also

$$AD = n . AC$$
$$AC = \frac{1}{m} AB$$
$$\overline{AD = n . \frac{1}{m} . AB}$$
$$\overline{AD = \frac{n}{m} . AB.}$$

Die Entfernung, wo Q soll angehängt werden, ist also $\frac{n}{m} . AB$. Hieraus läßt sich folgende Proportion machen

$$m : n = AB : AD$$
und auch $$m : n = Q : P$$
$$\overline{AB : AD = Q : P}$$

Es müssen sich daher die Gewichte zu einander umgekehrt verhalten, wie die Entfernungen vom Ruhepunkte.

38.

Das Produkt aus der Kraft in ihre Entfernung vom Ruhepunkte, heist das **Moment** dieser Kraft. Die Kraft aber wird immer in Gewicht, und die Entfernung in Längenmaaße ausgedrückt; daher muß man die Anzahl der Schuhe, Zolle oder

Linien allemal mit der Anzahl der Pfunde, Unzen u. s. f. multipliziren, das Moment der Kraft zu finden.

40, I.

Es sind die Gewichte und die Länge des ganzen Hebels gegeben, man soll den Ort der Unterstüzzung finden.

Der Hebel soll einer der ersten Art werden. Weil nun die Momente gleich seyn müssen; so muß

$$Q . AD = P . AB$$

$$AB = DB - AD \ (\textit{per fig.})$$

$$Q . AD = P . (DB - AD)$$

$$Q . AD = P . DB - P . AD$$

$$P . AD \text{ addirt}$$

$$Q . AD + P . AD = P . DB - P . AD + P . AD$$

$$Q . AD + P . AD = P . DB$$

$$(Q + P) . AD = P . DB$$

$$Q + P \text{ dividirt}$$

$$\frac{(Q + P) . AD}{Q + P} = \frac{P . DB}{Q + B}$$

$$\text{I) } AD = \frac{P . DB}{Q + P}$$

Es sey $P = 2$ Pfund; $Q = 4$ Pf.; $DB = 6$ Fuß, so ist $\frac{P . DB}{Q + P} = \frac{2 . 6}{4 + 2} = \frac{12}{6} = 2$ Fuß $= AD$.

Eben so findet man AB. Es sey wie vorhin wieder

$$Q \cdot AD = P \cdot AB$$

$$AD = DB - AB \text{ (per fig.)}$$

$$Q \cdot (DB - AB) = P \cdot AB$$

$$Q \cdot DB - Q \cdot AB = P \cdot AB$$

$$Q \cdot AB \text{ addirt}$$

$$Q \cdot DB - Q \cdot AB + Q \cdot AB = P \cdot AB + Q \cdot AB$$

$$Q \cdot DB = P \cdot AB + Q \cdot AB$$

$$Q \cdot DB = (P + Q) \cdot AB$$

$$P + Q \text{ dividirt}$$

$$\frac{Q \cdot DB}{P+Q} = \frac{(P+Q) \cdot AB}{P+Q}$$

$$\frac{Q \cdot DB}{P+Q} = AB$$

$$\frac{Q \cdot DB}{P+Q} = \frac{4 \cdot 6}{2+4} = \frac{24}{6} = 4 \text{ Fuß} = AB.$$

Da man vorhin AD = 2 Fuß gefunden hatte, so durfte man nur AD von DB abziehen, um AB zu finden; nemlich DB − AD = AB = 6 − 2 = 4 Fuß, wie es auch durch die vorige Rechnung gefunden worden ist. Man hat also allezeit die andere Länge zugleich, wenn man die Entfernung des ersten Gewichts vom Ruhepunkte weiß.

40, II.

Es ist gegeben CB; F; P; man sucht AC. Es muß

$$F \cdot AC = P \cdot AB$$
$$AB = AC + CB \; (p. f.)$$

$$F \cdot AC = P \cdot (AC + CB)$$
$$F \cdot AC = P \cdot AC + P \cdot CB$$
$$P \cdot AC \text{ abgezogen}$$

$$F \cdot AC - P \cdot AC = P \cdot AC + P \cdot CB - P \cdot AC$$

$$F \cdot AC - P \cdot AC = P \cdot CB$$

$$(F - P)\, AC = P \cdot CB$$
$$F - P \text{ div.}$$

$$\frac{(F - P) \cdot AC}{F - P} = \frac{P \cdot CB}{F - P}$$

$$AC = \frac{P \cdot CB}{F - P.}$$

Wenn P = 2 Pf.; F = 10 Pf.; CB = 12 Fuß, so ist

$$\frac{P \cdot CB}{F - P} = \frac{2 \cdot 12}{10 - 2} = \frac{24}{8} = 3 \text{ Fuß} = AC.$$

43.

$$P \cdot AB = Q \cdot AD \; (37)$$
$$Q \cdot AD \text{ abgezogen}$$

$$P \cdot AB - Q \cdot AD = Q \cdot AD - Q \cdot AD$$

1) $P \cdot AB - Q \cdot AD = 0$

2) $R = P + Q$; folglich ist das Moment von R dem Hebel um C zu drehen

$$R \cdot AC = (P+Q) \cdot AC$$

$$R \cdot AC = P \cdot AC + Q \cdot AC$$

$$AC = AB - CB \ (p.f.)$$

$$R \cdot AC = P \cdot (AB - CB) + Q \cdot AC$$

$$AC = CD - AD \ (p.f.)$$

$$R \cdot AC = P \cdot (AB - CB) + Q \cdot (CD - AD)$$

$$R \cdot AC = P \cdot AB - P \cdot CB + Q \cdot CD - Q \cdot AD$$

$$P \cdot AB - Q \cdot AD = 0 \ (1)$$

$$R \cdot AC = Q \cdot CD - P \cdot CB$$

$$R = P + Q \ (2)$$

$$3) \ (P+Q) \cdot AC = Q \cdot CD - D \cdot CB$$

Aus der Betrachtung der Figur kann man dieses auch sehen. Das Moment von Q den Hebel um C zu drehen, ist Q . DC; das Moment von P ist P . BC. Diese beiden Momente wirken gegen einander, deswegen hebt eins, nemlich das kleinere, etwas von der Wirkung des größern auf das Moment, womit der Hebel um C gedreht wird, zu finden, muß man das kleinere vom größern abziehen. Wenn daher ein Gleichgewicht erfolgen soll, so muß das Moment von R dem Unterschiede der beiden Q . DC und P . CB gleich seyn: daher

$$R \cdot AC = Q \cdot DC - D \cdot CB$$

P = 1 Pf.; Q = 2 Pf.; R = P + Q = 3 Pf;
AC = 1 Fuß; DC = 2 Fuß; CB = 1 Fuß.

$$Q \cdot DC - P \cdot CB = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$$

$$R \cdot AC = 3 \cdot 1 = 3$$

44.

Soll sich der Hebel nicht um a drehen, sondern im Gleichgewichte seyn, so muß

$$1)\ q \cdot ad = p \cdot ab$$

daher in a der beiden Gewichte gemeinschaftlicher Schwerpunkt seyn. Eine Kraft, die beide in a erhalten soll, ist

$$2)\ r = p + q$$

Läßt man den Hebel um c drehen, so dreht ihn r mit dem Momente $r \cdot ac$ aufwärts. Die beiden Gewichte p und q bemühen sich den Hebel niederwärts zu ziehen, und zwar mit ihren Momenten $q \cdot dc$ und $p \cdot bc$. Weil aber der Hebel in Ruhe bleibt, so muß das Moment $r \cdot ac$ den beiden $q \cdot dc + p \cdot bc$ gleich seyn.

$$r \cdot ac = q \cdot dc + p \cdot bc$$
$$r = p + q\ (2)$$
$$(p + q) \cdot ac = q \cdot dc + p \cdot bc$$

Ohne diese Betrachtung anzustellen, kann man auch $r \cdot ac$ auf folgende Art finden.

$$r = (p + q)\ (2)$$
$$r \cdot ac = (p + q) \cdot ac$$
$$r \cdot ac = p \cdot ac + q \cdot ac$$
$$ac = cb - ab\ (p. f.)$$
$$r \cdot ac = p \cdot (cb - ab) + q \cdot ac$$
$$ac = cd + ad\ (p. f.)$$
$$r \cdot ac = p \cdot (cb - ab) + q \cdot (cd + ad)$$
$$r \cdot ac = p \cdot cb - p \cdot ab + q \cdot cd + q \cdot ad$$
$$q \cdot ad = p \cdot ab\ (1)$$
$$r \cdot ac = p \cdot cb + q \cdot cd$$
$$r = p + q\ (2)$$

$$3)\ (p + q) \cdot ac = p \cdot cb + q \cdot cd$$

45.

Wenn die Gewichte und die Stellen, wo sie angehängt werden sollen, gegeben sind, so kann man ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt finden.

In 43, 3) ist

$$(P + Q) . AC = Q . CD - P . CB$$

$P + Q$ div.

$$\frac{(P + Q.) \; AC}{P + Q} = \frac{Q . CD - P . CB}{P + Q}$$

$$AC = \frac{Q . CD - P . CB}{D + Q}$$

Der Punkt A muß also nach der Seite zu liegen, auf welcher das größte Moment ist. Z. B. Hier ist das Moment Q . DC größer, als P . BC, also muß der Schwerpunkt A nach D zu liegen.

Eben so findet man in fig. 5. den Schwerpunkt a. Denn in 44, 3) ist

$$ca . (p + q) = cd . q + cb . p$$

divid. $p + q$

$$\frac{ca . (p + q)}{p + q} = \frac{cd . q + cb . p}{p + q}$$

$$ca = \frac{cd . q + cb . p}{p + q}$$

Hier muß also der Punkt a wieder nach b zu liegen. Daß er zwischen d und b liegen muß, ist offenbar, weil sonst keine Ruhe erfolgen kann, wenn nicht eine Kraft die Wirkung der andern aufhebt, also ihr entgegen wirkt. Dieses kann nicht anders geschehen, als wenn a zwischen d und b liegt. Das

Moment p. bc ist größer, als q. dc, folglich muß a nach b zu liegen.

47.

Die beiden Gewichte p und q kann man sich in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte angehängt vorstellen (46), und ihn nach 45 finden. Nemlich das Moment von p + q in c, muß der Summe der Momente beider Gewichte in ihren Stellen gleich seyn, das ist

$$(p+q) \cdot ac = p \cdot ab + q \cdot ad$$

p + q divid.

$$\frac{(p+q) \cdot ac}{p+q} = \frac{p \cdot ab + q \cdot ad}{p+q}$$

$$ac = \frac{p \cdot ab + q \cdot ad}{p+q}$$

Nun betrachte man die beiden Gewichte p; q als eins in c angebracht, und suche zwischen p + q und r den gemeinschaftlichen Schwerpunkt nach 45. Es muß aber das Moment der drei Gewichte in e angehängt, wieder den drei Momenten der Gewichte in ihren Stellen gleich seyn. Daher

$$1)\ p+q+r) \cdot ae = p \cdot ab + q \cdot ad + r \cdot af$$

p + q + r divid.

$$\frac{(p+q+r) \cdot ae}{p+q\ r} = \frac{p \cdot ab + q \cdot ad + r \cdot af}{p+q+r}$$

$$ae = \frac{p \cdot ab + q \cdot ad + r \cdot af}{p+q+r}$$

Wenn e der gemeinschaftliche Schwerpunkt der drei Gewichte p; q; r ist, so kann man sie als

eins ansehen, und zwischen ihnen und ſ wieder den gemeinschaftlichen Schwerpunkt suchen.

Es muß wieder das Moment p + q + r in e, und das Moment von ſ, dem Momente von p + q + r + ſ in g gleich seyn; deswegen

$$(p + q\ r) . ae + ſ . ah = (p + q + r + ſ) . ag$$

$$(p + q + r) . ae = p . ab + q . ad + r . af \quad (I)$$

$$p . ab + q . ad + r\ af + ſ . ah = (p + q + r + ſ) . ag \text{ oder}$$

$$(p + q + r + ſ) . ag = p . ab + q . ad + r . af + ſ . ah$$

$$p + q + r + ſ \text{ divid.}$$

$$ag = \frac{p . ab + q . ad + r . af + ſ . ah}{p + q + r + ſ}$$

Es sey p = 1 Pf.; q = 2 Pf.; r = 3 Pf.; ſ = 4 Pf.; ab = 2 Fuß; ad = 3 Fuß; af = 4 Fuß; ah = 6 Fuß; so ist

$$ag = \frac{1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + 4 . 6}{1 + 2 + 3 + 4}$$

$$ag = \frac{2 + 6 + 12 + 24}{10}$$

$$ag = \frac{44}{10} = 4,4 \text{ Fuß.}$$

50.

Es soll H + D, in M angebracht, eben das thun, was H in V, und P in B angebracht thun würden.

Es müssen also die Momente gleich seyn, das ist,

$$1)\ (H+P) \cdot AM = H \cdot AV + P \cdot AB$$

Zu wissen wo die Stelle M ist, an welcher man H + P anhängen soll, muß man mit H + P dividiren. Wenn also

$$(H+P) \cdot AM = AV \cdot H + AB \cdot P$$

H + P divid.

$$AM = \frac{AV \cdot H + AB \cdot P}{H + P}$$

Nunmehr kann man den Hebel als nicht schwer ansehen, und ihn betrachten, als hing blos in M ein Gewicht. Soll nun wieder ein Gewicht Q in D den Gewichten H + P in M das Gleichgewicht halten, so müssen die Momente abermals gleich seyn, das heist, es muß

$$2)\ AD \cdot Q = (H+P) \cdot AM$$

$$(H+P) \cdot AM = AV \cdot H + AB \cdot P\ (1)$$

$$AD \cdot Q = AV \cdot H + AB \cdot P$$

AD divid.

$$Q = \frac{AV \cdot H + AB \cdot P}{AD}$$

Das Gewicht des schwerern Hebels sey H = 4 Pf.; AV = 2 Fuß; AB = 3 Fuß; P = 6 Pf.; AD = 4 Fuß

$$Q = \frac{AV \cdot H + AB \cdot P}{AD}$$

$$Q = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 6}{4}$$

$$Q = \frac{8+18}{4} = \frac{26}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\tfrac{1}{2}\ \text{Pfund.}$$

50. Zusatz.

Ist Q gegeben, man soll P finden, und es ist alles noch so, als da man Q suchte, so verfahre man beinah auf eben die Art.

$$Q \cdot AD = AM \cdot (H+P) \quad (50,\ 2)$$

$$AM \cdot (H+P) = AV \cdot H + AB \cdot P \quad (50,\ 1)$$

$$Q \cdot AD = AV \cdot H + AB \cdot P$$

AV . H abgezogen

$$Q \cdot AD - AV \cdot H = AB \cdot P$$

AB divid.

$$\frac{Q \cdot AD - AV \cdot H}{AB} = P.$$

Es sind die Größen wie vorhin gegeben, auch sey $Q = 6\frac{1}{2}$ Pf., so ist

$$P = \frac{Q \cdot AD - AV \cdot H}{AB}$$

$$P = \frac{6\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 4}{3}$$

$$P = \frac{26 - 8}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ Pfund.}$$

Wäre vom Hebel die . . . . .

Ist die Länge des Hebels = BD; das Gewicht desselben = H; die Stelle seines Schwerpunktes in V; daher BV und DV = BD − BV gegeben, ferner auch P; Q bekannt, und man will A den Ort der Unterstützung wissen, so suche man aus der Gleichung in 50, 2) AB

$$Q . AD = AM . (H+P) \quad (50, 2)$$
$$AM . (H+P) = AV . H + AB . P \quad (50, 1)$$

$$Q . AD = AV . H + AB . P$$
$$AV = AB - BV \quad (p.f.)$$

$$Q . AD = (AB - BV) . H + AB . P$$

$$Q . AD = AB . H - BV . H + AB . P$$
$$AD = BD - AB \quad (p.f.)$$

$$Q . (BD - AB) = AB . H - BV . H + AB . P$$

$$Q . BD - Q . AB = AB . H - BV . H + AB . P$$
$BV . H$ addirt.

$$Q . BD - Q . AB + BV . H = AB . H + AB . P$$
$Q . AB$ addirt

$$Q . BD + BV . H = AB . H + AB . P + Q . AB$$

$$Q . BD + BV . H = (Q + P + H) . AB$$
$Q + P + H$ divid.

$$3) \quad \frac{Q . BD + BV . H}{Q + P + H} = AB$$

Wenn $Q = 6\frac{2}{3}$ Pf.; $BD = 7$ Fuß; $BV = 1$ Fuß; $H = 4$ Pf.; $P = 6$ Pf., so ist

$$AB = \frac{Q \cdot BD + BV \cdot H}{Q + P + H} \quad (3)$$

$$AB = \frac{6\frac{1}{2} \cdot 7 + 1 \cdot 4}{6\frac{1}{2} + 6 + 4}$$

$$AB = \frac{45\frac{1}{2} + 4}{16\frac{1}{2}}$$

$$AB = \frac{49\frac{1}{2}}{16\frac{1}{2}}$$

$$AB = \frac{\frac{99}{2}}{\frac{33}{2}} = \frac{99}{2} \cdot \frac{2}{33} = \frac{99}{33} = \frac{9}{3} = 3 \text{ Fuß.}$$

Hat man AB gefunden, so findet man AD $= BD - AB$ also

$$AD = BD - AB \ (p.f.)$$

$$AB = \frac{Q \cdot BD + BV \cdot H}{Q + P + H} \quad (50, 3. 3)$$

$$AD = BD - \frac{Q \cdot BD + BV \cdot H}{Q + P + H}$$

BD mit $Q + P + H$ multiplizirt u. div.

$$AD = \frac{BD \cdot (Q + P + H)}{Q + P + H} - Q \cdot BD - BV \cdot H$$

$$AD = \frac{BD \cdot Q + BD \cdot P + BD \cdot H - Q \cdot BD - BV \cdot H}{Q + P + H}$$

$$AD = \frac{BD \cdot P + BD \cdot H - BV \cdot H}{Q + P + H}$$

$$AD = \frac{BD . P + (BD - BV) . H}{Q + P + H}$$

$$BD - BV = DV \ (p.f.)$$

4) $$AD = \frac{BD . P + DV . H}{Q + P + H}$$

Wenn $H = 0$, das ist, wenn der Hebel als nicht schwer angesehen wird, so kommt

$$AD = \frac{BD . P}{Q + P}$$

wie in 40, I, 1)

Wenn die Werthe von AB und AD mit einander verglichen werden,

$$AB = \frac{Q . BD + BV . H}{Q + P + H} \quad (3)$$

$$AD = \frac{P . BD + DV . H}{Q + P + H} \quad (4)$$

so sieht man, daß wo im Werthe von AB, im Zähler Q steht, statt dessen im Werthe von AD, P vorkommt; nemlich oben steht Q . BD, statt dessen unten P . BD; ferner im andern Theile, wo oben B steht, ist unten D; oben BV . H, unten DV . H.

51.

Es verhalten sich nach Geom. 44. S. 11. Z. zwei ähnliche Bogen, wie ihre Halbmesser. Da nun Bb ∽ Dd, weil BAb = DAd als Vertikalwinkel; so ist

$$Bb : Dd = AB : AD$$

Wenn an D ein Gewicht Q, und an B eins P hing, so müßten sie, wenn ein Gleichgewicht erfol-

gen sollte, mit ihren Entfernungen vom Ruhepunkte in umgekehrten Verhältniß stehen (35). Also

I) $AB : AD = Q : P$

und weil $Bb : Dd = AB : AD$, so ist

$Bb : Dd = Q : P$

52.

Wenn $b\beta$ und $d\delta$ Perpendikel auf BD sind, so ist bei β ein rechter Winkel, und so auch bei δ, der Winkel $\beta Ab = \delta Ad$; folglich die beiden Dreiecke βAb und δAd ähnlich; in diesen ist wieder

$$\beta b : \delta d = Ab : Ad$$
$$Ab = AB\,;\ Ad = AD$$

$$\beta b : \delta d = AB : AD$$
$$AB : AD = Q : P \quad (51,\ I)$$

$$\beta b : \delta d = Q : P$$

Der Winkelhebel.

55.

Wenn mit dem Halbmesser CA ein Kreis AaA, und mit CB einer BbB beschrieben wird, so bemüht sich P die Scheibe um C zu drehen. Hängt man aber an a, das in der Entfernung $Ca = CA$ vom Mittelpunkte ist, ein Gewicht $p = P$, so ist das Moment, womit p die Scheibe drehet, $p \cdot aC$; und weil $p = P$, und $AC = aC$, so ist $p \cdot aC = P \cdot Ac$. Es ist daher ganz gleichgültig, ob P in A, oder p in a wirkt. Eben so ist $Q \cdot BC = q \cdot bC$. Wenn nun vorher P mit Q, welches die kleine Scheibe BbB nach der entgegengesetzten Richtung von da dreht, nach welcher die Scheibe AaA gedreht wird,

im Gleichgewichte war; so muß es auch itzt p mit q seyn. Es verhalten sich aber nach 36 die Gewichte verkehrt, wie ihre Entfernungen, also kann man setzen

$$q : p = Ca : Cb$$
$$q = Q ; p = P$$
$$Q : P = Ca : Cb$$
$$Ca = CA ; Cb = CB$$
$$Q : P = CA : CB$$

57.

Die Kraft P in A angebracht, zieht den Punkt A nach ihrer Richtung AD zu, zugleich aber drückt sie auch die Linie AC nach dieser Richtung AC zu. Diesen Druck empfindet der Punkt C, und wird immer größer, je kleiner der Winkel DAC ist, unter welchem die Kraft P in den Hebelarm AC wirkt. Durch ein Experiment läßt sich dieses sehr deutlich machen. Eben diese Beschaffenheit hat es mit dem Drucke, welchen Q auf den Punkt C ausübt. Q zieht den Punkt B nach der Richtung BE, schiebt aber die Linie BC nach dieser Richtung BC hin. Dieser Druck, den C leidet, ist desto größer, je kleiner der Winkel CBE ist. Wenn die Wirkung der Kraft P, den Punkt A nach AD zu ziehen, der Wirkung der Kraft Q, den Punkt B nach BE zu ziehen, gleich ist, so entsteht ein Gleichgewicht, oder Ruhe des Winkelhebels. Es kommt nicht darauf an, daß auch der Druck, welchen die Kraft P auf C ausübt, dem Drucke des Q auf C gleich ist; es braucht nur die Wirkung, den Hebel um C nach AD zu drehen, der Kraft, den Hebel um C nach BE zu drehen, gleich zu seyn.

59.

Wenn CT mit MV, und CV mit MT parallel ist, so ist der Winkel DTC = TMV (Geom. 11. S. II.) und TMV = CVE (Geom. 11. S. II.) Weil aber

DTC = TMV = CVE, so ist

DTC = CVE

TDC = CEV = R d. i. ein rechter Winkel.

△CDT ∽ △CEV

Es sind also in diesen ähnlichen Dreiecken

CD : CE = CT : CV (Geom. 26. S.)

CT = MV ; CV = TM

CD : CE = MV : TM

Zusammensetzung der Kräfte.

61.

Wenn der Punkt M mit einer Kraft MC, welche durch die beiden Kräfte MT und MV bewirkt wird, nach der Richtung MC getrieben wird, und der Punkt M nicht sinken soll, so muß die Gewalt, womit die Last gehalten wird, der Last gleich seyn. Drückt also Mc die Richtung der aufwärts wirkenden Kraft aus, so muß MC = Mc seyn, und beide müssen einander entgegen wirken.

62.

Soll die Kraft, welche die Richtung MC hat, und von den beiden äussern, deren Richtungen MV und MC sind, bewirkt wird, von einer ihr gleichen, aber gerade in entgegengesetzter Richtung wirkenden

Kraft Mc gehalten werden; so muß nothwendig Mc in dem nämlichen Verhältniß mit den beiden äussern Kräften stehen, in welchem MC mit ihnen steht.

Man stelle sich vor, es stoße jemand mit einer Kraft an eine Kugel in M, daß sie in der Richtung MT bis nach T lief, und ein anderer stoße eben diese Kugel, daß sie in der Richtung MV bis V sich bewege. Stoßen aber beide zugleich, so wird die Kugel weder nach MT noch nach MV laufen, sondern einen Mittelweg nehmen, welcher MC ist. Gerade bis C wird sie laufen. Man könnte glauben, sie laufe weiter, und ihr Weg müsse der Summe der Wege, welche die Kugel gemacht haben würde, wenn sie von jeder Kraft einzeln gestoßen worden wäre, gleich seyn. Es wird aber die Kugel nicht von beiden Kräften mit ihrer völligen Gewalt getrieben, sondern nur mit einem Theile von jeder, die übrige Gewalt vernichtet die eine bei der andern.

Wenn aber eine Kraft auf M in der Richtung Mc = MC stieß, daß M bis in c lief, und alle drei Kräfte MT, MV; Mc wirkten zugleich, so müßten sie die Kugel nicht von der Stelle bringen können, das heißt, es würde Ruhe erfolgen, indem die Kraft Mc die Wirkung der beiden MT und MV aufhebt.

Stößt die Kraft MV nicht mit, sondern die beiden MT und Mc nur allein, so geht M in der Richtung Mu bis u, und beschreibt Mu, welches dem MV gerade entgegengesetzt und gleich ist. Denn die Kraft Mc wirkt beiden Kräften MT und MV entgegen. Da nun MV nicht mit wirkt, so widersteht Mc blos dem MT, und Mc hat nun noch

Kraft, die MV gleich ist; weil aber dieser nichts widersteht, so geht die Kugel in der MV entgegengesetzten Richtung nach Mu fort.

so ist MVC = Muc....

Es ist MVC = Muc, weil uc mit MT, und MT mit CV parallel ist, daher auch uc und CV parallel und gleich sind. MVC = Muc (Geom. 11. S. III.); cMu = CMV (Geom. 8. S. 4. Z.); es muß also auch ucM = VCM seyn. Denn wenn in zwei Dreiecken unter zwei Paaren gleichnamigen Winkeln jedes Paar derselben gleich sind, so muß auch das dritte Paar gleich seyn. Aus zwei Winkeln und einer Seite läßt sich ein Dreieck beschreiben, und wenn die gleichnamigen Dinge zu zwei Dreiecken gleich sind, so müssen auch die beiden Dreiecke gleich seyn. Daher ist auch Mu = MV, und MC = Mc.

64.

Sollen die vier Kräfte in den.....

Bei den vier Kräften, welche die Wirkung MC hervorbringen sollen, müssen nicht eben zwei gleich und gerade entgegengesetzt wirken. Denn da man jede Kraft in zwei äussere auf unzählige Arten zerlegen kann (63), und sie immer die vorige Wirkung hervorbringen müssen, so können auch die vier Kräfte, in welche man die beiden MT und MV zerlegen kann, die nemliche Wirkung thun, welche die zwei ersten thaten; nemlich M in der Richtung MC nach C zu treiben. Dieß wird auch klar, wenn man die fig. III. der Erläut. vor sich nimmt.

Es sind MT und MV die beiden Kräfte, welche M in der Richtung MC nach C treiben sollen. Man

zerlege MT in die beiden MQ und MS, welche leztere in der Richtung MC liegt, so wird das Parallelogramm dieser Kräfte MQST seyn. Die Kraft MV zerlege man in MR, welche der MQ nicht gleich und entgegengesetzt ist, und in MO, welche in der Richtung MC wirkt. Das Parallelogramm dieser Kräfte ist MRVO. Die beiden Kräfte MS und MO liegen in der Richtung MC, treiben daher M schon nach der Richtung MC zu. Es ist nun die Frage, wohin MQ und MR den Punkt M treiben werden?

Man kann diese beiden Kräfte als ein Paar einzelne ansehen, von welchen man ihre mittlere wissen will. Die Diagonale des Parallelogramms MQLR ist ML. Wenn diese in MC fällt, so treiben also auch diese beiden Kräfte MQ und MR, M nach C zu, und der Satz: daß die Kräfte MQ und MR nicht eben müssen gleich und entgegengesetzt seyn, bewiesen. Wenn man erweiset, daß der Winkel QMS = QML, so ist erwiesen, daß ML in MC fällt.

Es ist in dem Parallelogramme QMST

$$QMS + MQT = 2R$$

und weil auch in QMRL

$$QMR + MQL = 2R, \text{ so ist}$$

$$QMS + MQT = QMR + MQL$$

$$MQT = MQL + LQT \ (p.f.)$$

$$QMS + MQL + LQT = QMR + MQL$$

MQL abgezogen

$$QMS + LQT = QMR$$

$$QMR = QML + LMR \ (p.f.)$$

1) $QMS + LQT = QML + LMR$

Zwischen den beiden Parallellinien QT und MS sind die beiden Wechselwinkel

2) LQT = QLM (Geom. 11. S. III.)

(Es mag die Diagonale des Parallelogramms QMRL die Linie Mx oder My seyn, so kann man doch QL ziehen, bis sie MC in L schneidet, damit man den Winkel QLM bekommt). Zwischen den Parallelen QL und MR ist QLM = LMR, da nun

LQT = QLM (2) und
QLM = LMR (Geom. 11. S. III.) so ist

3) LQT = LMR

Nun war in 1)

QMS + LQT = QML + LMR
LQT = LMR (3)

QMS = QML

Da diese beiden Winkel gleich sind, so liegt ML in MC. Man kann also diese vier Kräfte als drei ansehen, welche alle nach der Richtung MC wirken. Sollen diese drei Kräfte M bis C treiben, so müssen MO + ML + MS = MC seyn.

In den beiden Dreiecken LMR und POV hat man

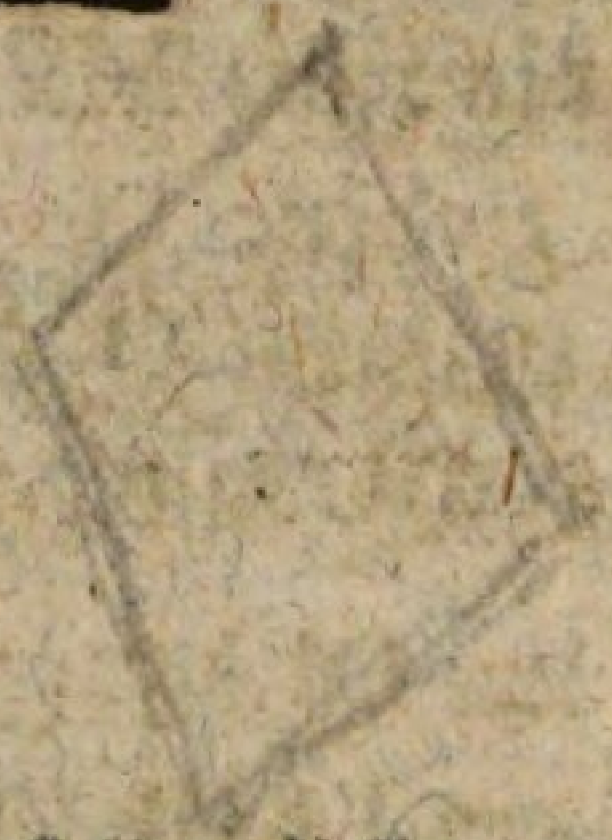
LR = VP und da beide Parallelen sind, so ist
MLR = OPV (Geom. 11. S. II.)
MR = OV

△MLR = △OPV

4) ML = OP

Ferner ist in den beiden Dreiecken TMS und PCV, weil TS = QM = LR = PV, und Parallelen sind

$$TS = PV$$
$$TMS = PCV \text{ (Geom. 11. S. III.)}$$
$$TM = CV$$
$$\triangle TMS = \triangle PCV$$
$$5)\ MS = PC$$



Nun ist

$$MO = MO$$
$$ML = OP \ (4)$$
$$MS = PC \ (5)$$
$$MO + ML + MS = MO + OP + PC$$
$$MO + OP + PC = MC \ (p.f.)$$
$$MO + ML + MS = MC.$$

65.

Weil TC und MV Parallelen sind, so ist der Winkel

$$A)\ MCT = CMV$$
$$MTC + DTC = 2R \ (p.f.)$$
$$DTC = TMV \ (p.f.)$$
$$MTC + TMV = 2R.$$

Zwei Winkel, welche einander zu 2 R ergänzen, haben einerlei Sinus (Trig. 2. Erkl. 2. Z.). Daher

$$B)\ \sin MTC = \sin TMV$$

Wenn MTCV ein Parallelogramm ist, so sind die beide gegenüberstehenden Winkel gleich, also

$$C)\ MTC = MVC$$

In dem Dreiecke MTC verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel. (Trig. 10. S.) Also

$MT : MC = \sin MCT : \sin MTC$
$MCT = CMV \quad (A)$

$MT : MC = \sin CMV : \sin MTC$
$\sin MTC = \sin TMV \quad (B)$

1) $MT : MC = \sin CMV : \sin TMV.$

Eben so verhalten sich in dem Dreiecke MCV

$MC : MV = \sin MVC : \sin MCV$
$MVC = MTC \quad (C)$

$MC : MV = \sin MTC : \sin MCV$
$\sin MTC = \sin TMV \quad (B)$

$MC : MV = \sin TMV : \sin MCV$
$MCV = CMT \quad (p.f.)$
$MC : MV = \sin TMV : \sin CMT$
$MT : MC = \sin CMV : \sin TMV \quad (1)$

$MT : MV = \sin CMV : \sin T$ (Ar. V, 51.)

MC findet man trigonometrisch also. Es sind $TM = VC$; $MV = PC$ und der Winkel TMV, den sie einschließen, gegeben, es heiße dieser Winkel α.

In dem Dreiecke MVC ist

$MVC = 2R - MCV - CMV$ (Geom. 13. S.)
$MCV = CMT \quad (p.f.)$

$MVC = 2R - CMT - CMV$

$MVC = 2R - (CMT + CMV)$
$CMT + CMV = TMV = \alpha$

2) $MVC = 2R - \alpha$

Aus diesem Winkel und den ihn einschließenden Seiten MV und VC findet man VMC und

$VCM = TMC$ (Trig. 15. S.) Es verhält sich nemlich die Summe der beiden Seiten zu ihrer Differenz, wie sich die Tangente der halben Summe der beiden unbekannten Winkel zu der Tangente ihrer halben Differenz verhält. Die Summe der beiden unbekannten Winkel findet man, wenn man den bekannten von 2 R abzieht, indem alle drei zusammen 2 R ausmachen. Also

$$CMV + VCM = 2R - MVC$$

$$MVC = 2R - \alpha \quad (2)$$

$$CMV + VCM = 2R - (2R - \alpha)$$

$$CMV + VCM = 2R - 2R + \alpha$$

3) $CMV + VCM = \alpha$

Ordnet man nun die Proportion, so ist

$$MV + VC : MV - VC = \tan\tfrac{1}{2}(CMV + VCM) : \tan\tfrac{1}{2}(CMV - VCM)$$

$$CMV + VCM = \alpha \quad (3)$$

4) $MV + VC : MV - VC = \tan\tfrac{1}{2}\alpha : \tan\tfrac{1}{2}(CMV - VCM)$

Es sey die Kraft

5) $MT = VC = 9$ Pfund

6) $MV = 11$ Pf.

Der Winkel, unter welchem beide Kräfte auf M wirken

7) $TMV = \alpha = 55^\circ\, 49'$ daher

8) $\tfrac{1}{2}\alpha = 27^\circ\, 54'\, 30''$

Die 30″ werden weggelassen, weil sie hier keinen bemerkbaren Einfluß haben können.

Nun setze man in 4) die hier angenommenen Werthe, so kommt statt

$$MV+VC : MV-VC = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV-VCM)$$

$$11\,(6)+9\,(5) : 11-9 = \text{tang}\,27^\circ\,54'\,(8) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV - VCM)$$

$$20 : 2 = \text{tang}\,27^\circ\,54' : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV - VCM)$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV - VCM) = \frac{2.\ \text{tang}\,27^\circ\,54'}{20}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV - VCM) = \frac{\text{tang}\,27^\circ\,54'}{10}$$

$$\log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV - VCM) = \log\text{tang}\,27^\circ\,54' - \log 10$$

$$\log\text{tang}\,27^\circ\,54' = 9{,}7238436$$
$$\log\ 10 = 1{,}0000000$$

$$\log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(CMV-VCM) = 8{,}7238436$$

$$(9)\ \tfrac{1}{2}\,(CMV-VCM) = 3^\circ\,2' -$$

Dieses — bedeutet, daß man noch etwas von 3° 2′ abziehen müsse, weil 3° 2′ etwas zu groß ist.

Zieht man diese halbe Differenz der unbekannten Winkel von der halben Summe derselben ab, so bekommt man den kleinen Winkel (Trig. 13. S.), welcher allezeit der kleinsten Seite gegenüber steht, also der Winkel

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 27^\circ\,54'\ (8)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(CMV - VCM = 3^\circ\,2'\ (9)$$

$$(10)\ CMV = 24^\circ\,52'$$

Addirt man zu der halben Summe die halbe Differenz, so bekommt man den großen Winkel VCM=TMC,

(Trig. 13. S.) welcher der größern Seite gegenüber steht.

$$\frac{1}{2}\alpha = 27° 54' \quad (8)$$
$$\frac{1}{2}(CMV - VCM) = 3° 2' \quad (9)$$

$$11)\ TMC = 30° 56'$$

Diesen Winkel findet man auch, wenn man die beiden Winkel CMV und MVC addirt und die Summe von 2 R abzieht.

TMV + MVC = 2 R, weil TMVC ein Parallelogramm ist.

$$MVC = 2R - TMV$$
$$TMV = \alpha$$

$$MVC = 2R - \alpha$$

$$MVC = 180° - 55° 49'$$

$$12)\ MVC = 124° 11'$$

$$TMC = 2R - (MVC + CMV)$$
$$MVC = 124° 11' \quad (12);$$
$$CMV = 24° 52' \quad (10)$$

$$TMC = 180° - (124° 11' + 24° 52')$$

$$TMC = 180° - 149° 3'$$

$$TMC = 30° 57'$$

Hier findet man 1' mehr für den Winkel TMC, als in 11). Die Ursache davon ist folgende. Den Winkel TMC in 11) brachte man heraus, wenn zu $\frac{1}{2}\alpha = 27° 54'$ die halbe Differenz 3° 2' addirt wurde; diese halbe Diffe-

renz ist zwar etwas zu groß, aber $\frac{1}{2}\alpha$ ist um 30″ zu klein. Wenn man diese beiden Größen addirt, so wird TMC doch noch immer **zu klein**. Der Winkel CMV wurde gefunden, wenn man in 10) die halbe Differenz von der halben Summe, d. i. von $\frac{1}{2}\alpha$ abzog. Weil aber $\frac{1}{2}\alpha$ zu klein, und die halbe Differenz zu groß war, so mußte der Winkel CMV **zu klein** werden. Diesen Winkel CMV addirte man zu MVC und zog diese Summe von 2 R ab, den Winkel TMC zuletzt zu finden. Weil CMV zu klein war, so wurde die Summe CMV + MVC zu klein. Diese von 2 R abgezogen, bleibt der Rest **zu groß**. Daher ist 30° 57′ für TMC zu groß, und 30° 56′ zu klein. Wollte man den Winkel auf Sekunden berechnen, so würde man der Wahrheit näher kommen. Zu der gegenwärtigen Absicht aber, ist die Genauigkeit weit genug getrieben.

Man hat nunmehr in dem Dreiecke MVC alle drei Winkel und zwei Seiten MV und VC, daraus kann man die Verhältnisse der beiden Kräfte gegen die aus ihnen entspringende mittlere, welche in der Richtung MC wirkt, finden. Daher stellt man, MC zu finden, die Proportion also:

$$\sin CMV : \sin CVM = CV : MC$$

$$MC = \frac{CV \,.\, \sin CVM}{\sin CMV}$$

$$\sin CVM = \sin TMV \text{ (Trig. 2. Erkl. 2. Z.)}$$

$$MC = \frac{CV \,.\, \sin TMV}{\sin CMV}$$

$$TMV = 55^\circ\, 49' \;(7)\;;\; CV = 9\;(5)$$

$$CMV = 24^\circ\, 52' \;(10)$$

$$MC = \frac{9 \cdot \sin 55\ 49'}{\sin 24^\circ\ 52'}$$

$$\log MC = \log 9 + \log \sin 55^\circ 49' - \log \sin 24^\circ 52'$$

$$\log 9 = 0{,}9542425$$

$$\log \sin 55^\circ 49' = 9{,}9176336$$

$$A)\quad 10{,}8718761$$

$$\log \sin 24^\circ 52' = 9{,}6237743$$

$$13)\quad 1{,}2481018$$

$$MC = 17$$

Will man MC genauer finden, so suche man den Logarithmen unter der Kennziffer 3 auf, und schneide dann so viele Ziffern von der Rechten gegen die Linke zu für Dezimaltheile ab, als man Einheiten zu der Kennziffer addirt hat; nemlich hier hat man zwei Einheiten addirt, so schneidet man zwei Ziffern für Dezimaltheile ab. Für

$$\log MC = 1{,}2481018\ (13)$$

findet man MC = 17,70.

Denn da die Logarithmen in einem arithmetischen, und die Zahlen, denen sie zugehören, in einem geometrischen Verhältnisse fortgehen, auch für die Logarithmen das dekadische System angenommen ist, so muß man die Zahl mit 10 multipliziren, deren Logarithme um 1 vermehrt wird. Man multiplizirt also eine Zahl mit so viel mal 10, als man Einheiten zu ihrem Logarithmen addirt. Soll nun die Zahl nicht durch so vielmal 10 multiplizirt bleiben, so viel Einheiten man zu ihrem Logarithmen addirt hat, so ist nöthig, die Zahl wieder durch so viel mal 10 zu dividiren; welches geschieht, wenn man so viel Ziffern für die

Dezimaltheile abschneidet, als man Einheiten zum Logarithmen addirt hat. (Ar. VI, 33.)

65, I.

Zwischen allen drei Kräften ....

In Trig. 20. S. 1. Z. findet sich die Formel

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2$$

Man setze $b = MT = VC = p$; $c = MV = q$; $a = MC = f$; $A = MVC$; $TMV = \alpha$, alsdann ist

$$p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos MVC = f^2$$

Nun ist aber $\cos MVC = - \cos\alpha$ (Trig. 3. Erkl. 2. Z.), diesen statt $\cos MVC$ gesetzt, kommt

$$p^2 + q^2 - 2pq \cdot - \cos\alpha = f^2$$

Wenn − mit − multiplizirt wird, bekommt man + (Ar. I, 105), also

$$A)\ p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos\alpha = f^2$$

Wenn man aus diesem Werthe des f^2 die Wurzel zieht, so bekommt man $f = MC$.

$$\surd(p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos\alpha) = f$$

$$\cos\alpha = \cos 55^\circ 49' = 0{,}5618428$$
$$q = 11$$

$$5618428$$
$$5618428$$

$$\cos\alpha \cdot q = 6{,}1802708$$
$$p = 9$$

$$\cos\alpha \cdot q \cdot p = 55{,}6224372$$
$$2 = 2$$

$$2 \cos\alpha \cdot q \cdot p = 111{,}2448744$$
$$q^2 = 121$$

$$2 \cos\alpha \cdot q \cdot p + q^2 = 232{,}2448744$$
$$p^2 = 81$$

$$2 \cos\alpha\, q p + q^2 + p^2 = 3|13{,}24|48|74|40 \dagger 17{,}6987 = f$$

```
      1
     ---
     213
      27
     189
     ----
     2424
      346
     2076
     -----
     34848
      3529
     31761
     ------
     308774
      35388
     283104
     -------
     2567040
      353967
     2477769
     -------
       89271
```

Es kommt nach der Ausziehung der Quadratwurzel weniger für MC = f heraus, als in 65, (13). Die Werthe sind aber beinahe gleich. Denn man kann füglich 0,69 = 0,7 setzen. Daher kommt hier auch

$$17{,}7 = MC = f.$$

Die Ursache ist: In der Berechnung 65, 13) ist der Sinus des Winkels CMV gebraucht worden. Dieser Winkel war 24° 52′, welcher Werth aber zu klein ist, und wenigstens 24° 52′ 40″ seyn muß, wofür man ohne merklichen Fehler 24° 53′ setzen kann. Der log sin 24° 53′ ist

9,6240468, diesen von dem Logarithmen in 65; A) abgezogen

$$\begin{array}{r} 10,8718761 \\ 9,6240468 \\ \hline 1,2478293 \end{array}$$

Unter der Kennziffer 3 aufgesucht, giebt MC = 17,69+, welches mit der letzten Berechnung für MC übereinstimmt.

65, II.

Zwischen beiden äussern .....

Nach Trig. 10. S. verhalten sich die Seiten eines Dreiecks zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber stehenden Winkel. Daher ist im Dreiecke MVC

$$\begin{array}{l} MV : VC = \sin MCV : \sin CMV \\ q : p = \sin MCV : \sin \eta \\ \qquad\qquad MCV = CMT = \zeta \\ \hline A)\ q : p = \sin \zeta : \sin \eta \end{array}$$

65, III.

Im Dreiecke MCV ist

$$\begin{array}{l} MC : VC = \sin MVC : \sin CMV \\ \qquad \sin MVC = \sin TMV \text{ (Trig. 2. Erkl. 2 3.)} \\ \hline MC : VC = \sin TMV : \sin CMV \\ 1)\ f : p = \sin \alpha : \sin \eta \end{array}$$

und in dem nemlichen Dreiecke ist

$$MC : MV = \sin MVC : \sin MCV$$
$$\sin MVC = \sin TMV$$ (Trig. 2. Erkl. 23.)

$$MC : MV = \sin TMV : \sin MCV$$
$$MCV = CMT$$

$$MC : MV = \sin TMV : \sin CMT$$
$$f : q = \sin \alpha : \sin \zeta$$

65, IIII.

In 65, II, A) steht $q : p = \sin \zeta : \sin \eta$ daher

$$q \cdot \sin \eta = p \cdot \sin \zeta$$
$$\eta = \alpha - \zeta$$

$$q \cdot \sin (\alpha - \zeta) = p \cdot \sin \zeta$$

Eben so ist, weil $q \cdot \sin \eta = p \cdot \sin \zeta$, und

$$\zeta = \alpha - \eta$$

$$q \cdot \sin \eta = p \cdot \sin (\alpha - \eta)$$

65, V.

Setzt man die beiden äussern Kräfte gleich, so sind auch ihre 2 Winkel, welche sie mit der mittlern Kraft machen gleich. Man hat also in 65, I, A)

$$f^2 = p^2 + q^2 + 2 p q \cdot \cos \alpha$$
$$p = q$$

$$f^2 = 2 p^2 + 2 p^2 \cdot \cos \alpha$$

B) $f^2 = 2 p^2 (1 - \cos \alpha)$

In Trig. 19. S. 5. Z. ist $\cos 2\phi = 2 \cos \phi^2 - 1$.

Man nehme $2\,\phi = \alpha$, so ist

$$\cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

Diesen Werth von $1 + \cos\alpha$ in der Gleichung B) statt $1 + \cos\alpha$ gesetzt, kommt

$$f^2 = 2\,p^2 \,.\, 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

$$f^2 = 4\,p^2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

$$f = 2\,p \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\alpha = \eta + \zeta$$

$$f = 2\,p \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(\eta + \zeta)$$

$$\eta = \zeta$$

$$f = 2\,p \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\,2\,\eta$$

$$f = 2\,p \,.\, \cos\eta.$$

Das Räderwerk.

77.

Wenn die Last und die Kraft an dem Rade Q angebracht wäre, und beide wirkten nach Tangenten, so verhielten sich Last und Kraft, wie die Halbmesser (72). Also, wenn der Halbmesser der Welle = a, des Rades = q, die Kraft am Rade Q sey = α; so ist

$$x : P = a : q$$

$$x \,.\, q = P \,.\, a$$

$$x = \frac{P \,.\, a}{q}$$

An einem Zahne des Rades Q müßte also eine Kraft $= \frac{a}{q} \cdot P$ wirken, das Gewicht P zu erhalten. Diese Kraft ist folglich die, welche das folgende Rad R an seinem Getriebe treibt. Es ist daher so gut, als hing an der Welle B des Rades R eine Last $= \frac{a}{p} \cdot P$, welcher sollte das Gleichgewicht gehalten werden. Man hat also wieder die Kraft zu finden, welche an dem Rade R sollte angebracht werden. Wenn man diese Kraft = y; den Halbmesser der Welle = b; des Rades = r setzt, so ist

$$y : \frac{a}{q} \cdot P = b : r$$

$$y \cdot r = \frac{a}{q} \cdot P \cdot b$$

$$y \cdot r = \frac{a \cdot b}{q} \cdot P$$

$$y = \frac{a \cdot b}{q \cdot r} \cdot P$$

$$y = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P$$

Die Kraft also, welche an dem Rade R angebracht werden müßte, wäre $= \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P$. Mit dieser Gewalt treibt daher das Rad R das Getriebe C des Rades S. Die Kraft zu finden, welche hier angebracht werden muß, verfahre man wie bei den ersten. Die Last $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P$

hängt an der Welle C. Wenn also der Halbmesser der Welle $= c$ des Rades $= s$ ist, so ist

$$F : \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P = c : s$$

$$F \cdot s = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{r} \cdot P \cdot c$$

$$F = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{r} \cdot P \cdot \frac{c}{s} \text{ oder}$$

$$1)\ F = \frac{c}{s} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{a}{q} \cdot P$$

Man muß also mit dem Halbmesser eines jeden Rades in den Halbmesser seiner an ihm befestigten Welle dividiren, diese Quotienten und die Last mit einander multipliziren, um die Kraft, welche man am letzten Rade anwenden muß, zu finden.

Exempel. Man nehme $P = 1000$ Pf.; $a = 18$ Zoll; $q = 72$; $b = 14$; $r = 70$; $c = 10$; $s = 60$, so hat man

$$F = \frac{c}{s} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{a}{q} \cdot P \quad 1)$$

$$F = \frac{10}{60} \cdot \frac{14}{70} \cdot \frac{18}{72} \cdot 1000$$

$$F = \frac{1}{6} \cdot \frac{14}{70} \cdot \frac{2}{8} \cdot 1000$$

$$F = \frac{1 \cdot 14 \cdot 1 \cdot}{6 \cdot 70 \cdot 4 \cdot} \cdot 1000$$

$$F = \frac{14}{6 \cdot 7 \cdot 4} \cdot 100$$

$$F = \frac{14}{168} \cdot 100 = \frac{1400}{168} = \frac{4 \cdot 350}{4 \cdot 42} =$$

$$\frac{4 \cdot 2 \cdot 175}{4 \cdot 2 \cdot 21} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 25}{4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \text{ Pf.}$$

So viel braucht man unter diesen Umständen, das Gleichgewicht mit 1000 Pfund zu halten.

78.

Wenn die Last und die Kraft gegeben sind, so weiß man, der wievielste Theil die Kraft von der Last seyn soll. Z. B. es soll

$F : P = 21 : 100$ seyn, so ist

$$F \cdot 100 = P \cdot 21$$

$$F = \frac{21}{100} \cdot P$$

$\frac{21}{100}$ ist daher der Bruch, welcher anzeigt, der wievielste Theil die Kraft von der Last seyn soll. Der Zähler drückt also die Größe des Halbmessers der Welle $= a$, und der Nenner die Größe des Halbmessers des Rades $= q$ aus. Der Halbmesser der Welle muß folglich $a = 21$ Zoll seyn, wenn der Halbmesser des Rades $q = 100$ Zoll ist.

Sollen zwei Räder angebracht werden, so zerfälle man sowohl den Zähler als auch den Nenner des Bruchs in zwei Faktoren; nemlich $21 = 3 \cdot 7$, und $100 = 4 \cdot 25$.

Daher ist $\frac{21}{100} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{25}$. Wenn nun alles Zolle sind, so bekommt des ersten Rades Welle zum Radius 3 Zoll, der des Rades 4; des zweiten Rades Wellenhalbmesser 7 Zoll, des Rades Halbmesser selbst aber 25 Zoll.

Wenn drei Räder sollen gemacht werden, so zerfälle man den Bruch in drei Faktoren, $\frac{21}{100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10}$, wo wieder die Zähler die Halbmesser der Wellen, und die Nenner die Halbmesser der Räder selbst sind.

80.

Wenn der Winkel ACa = BCb ist, so sind die Bögen Aa und Bb ähnlich. Indem nun der Punkt A bis in a sich bewegt, so bewegt sich b, an welchem die Last q vermittelst eines Fadens befestigt ist, bis in B; A beschreibt den Bogen Aa, und b den Bogen Bb. Diese Bögen verhalten sich, wie ihre Halbmesser (Geom. 44 S. 4. Z.) und die Last verhält sich zu der Kraft, umgekehrt wie die Halbmesser der Bögen (55).

$$\begin{array}{l} aA : bB = AC : BC \\ q : p = AC : BC \\ \hline aA : bB = q : p \end{array}$$

82.

Hat ein Rad 30 Zähne, und es greift in ein Getriebe, welches 5 Triebstöcke hat, so stößt jeder Zahn des Rades einen Triebstock des Getriebes, in welches er eingreift, fort. Wenn also 5 Zähne des Rades vorbei sind, so ist das Getriebe einmal herum. So vielmal ich also 5 von

30 wegnehmen kann, so vielmal dreht sich das Getriebe herum, indem sich das Rad nur einmal herumdreht. Oder, die Umdrehungen eines Getriebes für die jedesmalige Umdrehung des Rades zu finden, muß man die Anzahl der Zähne des Rades, das in das Getriebe greift, mit der Anzahl der Triebstöcke dividiren.

83.

Die Theilung geschieht am bequemsten, wenn man die Zahl der Zähne, welche das Rad bekommen soll, immer halbiren kann. Z. B. man hätte ein Rad mit 64 Zähnen zu verfertigen, so theilt man erst dasselbe in die Hälfte, worauf man 2 Theile bekommt; jeden dieser zwei Theile wieder in 2 Theile getheilt, werden 4 Theile; jeden dieser 4 Theile abermals halbirt, kommen 8 Theile; wieder die Hälfte jeden Theils genommen, entstehen 16; diese abermals halbirt, bekommt man 32 Theile; und endlich noch einmal halbirt, bekommt man die verlangten 64 Theile. Es wird sich aber 61 nicht so bequem theilen lassen. Hier wird erfodert, entweder das ganze Rad auf einmal in die 61 Theile zu theilen, welches sehr beschwerlich ist, oder sich künstlicherer Vortheile zu bedienen, deren folgender einer ist.

Man soll ein Rad, dessen Radius 8 Fuß zwölftheiliges Maaß ist, in 61 Theile theilen. Dieses zu bewerkstelligen, theile man das ganze Rad fig. IV. der Erläut. in A und B in zwei gleiche Theile. Der Zentriwinkel BCD des Einundsechzigecks ist $y = \frac{360^\circ}{61} = 5^\circ + \frac{55^\circ}{61}$ $= 5^\circ + \frac{55 \cdot 60'}{61} = 5^\circ + 54' + \frac{6'}{61} = 5^\circ + 54' + \frac{6 \cdot 60''}{61}$ $= 5^\circ + 54' + 5'' + \frac{55''}{61}$, dafür man $5^\circ + 54' + 6''$

setzen kann. Man nehme $\frac{2}{7}$ dieses Winkels, so bekommt man 8° 51′ 9″. Für diesen Winkel suche man die Sehne, welche sich leicht, vermöge der Sinustafeln finden läßt. Es ist nemlich 2 . sin $\frac{1}{2}$ (8° 51′ 9″) = 2 sin 4° 25′ 34″ = Sehne 8° 51′ 9″. Statt sin 4° 25′ 34″ ist schon hinreichend genug, den sin 4° 26, zu nehmen.

sin 4° 26′ = 0,0772991

2 sin 4° 26′ = 0,1545982

welches also die Sehne von 8° 51′ für den Radius = 1 wäre. Diese Sehne für den Radius 8 Fuß zu finden, muß man die gefundene Größe mit 8 multiplizieren. Man bekommt also die Sehne 8° 51′ = 8 . 0,1545982 = 1,2367856 für den Radius = 8 Fuß. Die Dezimaltheile mit 12 zu Zollen gemacht, kommen 1 Fuß 2,8414272 Zoll, diese Dezimaltheile abermals mit 12 zu Linien gemacht, kommen 1 Fuß 2 Zoll 10,0971264 Linien, wofür man 1 Fuß 2 Zoll 10 Linien setzen kann.

Nun trage man diese Sehne von B bis a, und auch von B bis b. Das Stück aBbA halbire man in e, desgleichen das Stück bBaA in f; ferner alle Theile halbirt; als ae in g, eA in h, Af in i, fb in k. Ferner ag in l; bk in m; und so die übrigen Theile halbirt. Ferner al in n, bm in o halbirt, welches man mit allen Theilen also macht. Nach diesen sechs Halbirungen ist das Rad in 61 Theile sehr bequem getheilt.

Der Beweiß von diesem Verfahren läßt sich ohne große Schwierigkeit einsehen. Ich mache eigentlich 64 Theile, und weil dazu der einfache Kreis nicht zureicht, so nehme ich noch drei Theile über den ganzen Kreis. Diese drei Theile berechne ich, und trage von B nach b und nach a $1\frac{1}{2}$ Theil. Wenn nun bei a der Anfang der Theilung seyn

soll, so theile ich aBbAaBb in 64 Theile. aBbA wird die Hälfte der 64 Theile, d. i. 32 Theile, seyn, desgleichen auch bBaA. Nun bekümmere ich mich nicht darum, in wie viel Theile der ganze Kreis soll getheilt werden, sondern ich theile den Theil aBbA in e, und bBaA in f in 2 gleiche Theile, und fange jedesmal die folgenden Theilungen bei a nach b zu, und bei b nach a zu an, bis ich nach sechs Halbirungen die 64 Theile in aBbAaBb erhalte, wo nothwendig auf den ganzen Kreis aBbAa nur 61 gleiche Theile kommen.

Man sieht, daß sich andere schwer zu theilende Zahlen auf ähnliche Art sehr bequem und vollkommen richtig theilen lassen, wenn man nur die ersten Theile scharf genug berechnet. Man kann eben so die Zahl der Theile auf eine niedrigere Zahl, welche sich bequem halbiren läßt, bringen, dann die Theile, welche man abschneidet, berechnen, und den übrigen Raum gehörig theilen. So hätte man von B nach o und nach n einen halben Theil tragen können, daß daher no ein ganzer gewesen wäre, und den übrigen Raum nAo in 60 Theile theilen. Vielleicht ist dieser Vortheil, welchen ich noch nirgends gelesen zu haben mich erinnere, brauchbarer, als manche andere.

84.

Das Rad Q habe $\varkappa = 60$ Zähne, das Getriebe B, $\beta = 6$ Triebstöcke, so treiben 6 Zähne des Rades Q das Getriebe B einmal, folglich alle 60 Zähne, das Getriebe $\frac{\varkappa}{\beta} = \frac{60}{6} = 10$mal herum. Das Rad R habe $\varsigma = 45$ Zähne, sein Getriebe C, in welches das Rad R eingreift, habe $\gamma = 5$ Triebstöcke, so dreht sich das Getriebe C mit

dem an ihm befestigten Rade S $= \frac{\varrho}{\gamma} = \frac{45}{5} =$ 9mal herum, indem sich R einmal herum bewegt. Folglich dreht sich S oder C, bei einer Umdrehung des Q, $\frac{\varkappa}{\beta} \cdot \frac{\varrho}{\gamma} = 10 \cdot 9 = 90$mal um. Hätte S $\sigma = 32$ Zähne, sein Getriebe T $\delta = 8$ Triebstöcke, so würde das Getriebe T $\frac{\sigma}{\delta} = \frac{32}{8} =$ 4mal herum getrieben werden, indem S sich nur einmal herumbewegte. Daher läuft T, bei einer Umdrehung des Q, $\frac{\varkappa}{\beta} \cdot \frac{\varrho}{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\delta} = 10 \cdot 9 \cdot 4 = 360$mal herum.

85. Exempel.

Wenn sich das Getriebe 60mal herumdrehen soll, indem sein Rad (nemlich das Rad, welches in dieses Getriebe greift, wie allemal eines Rades Getriebe das ist, in welches das Rad greift, und so das Rad eines Getriebes das ist, von welchem es getrieben wird) einmal herum geht, so müßte (wenn es möglich wäre, daß ein Getriebe mit nur einem Triebstocke von einem Rade könnte getrieben werden) für einen Triebstock des Getriebes sein Rad 60 Zähne haben, wobei das Getriebe von einem jeden Zahne einmal herum gedreht werden könnte, und also das Getriebe 60mal herum kommen, indem das Rad sich nur einmal umwälzt. Hätte das Getriebe 2 Triebstücke, so müßte das Rad $2 \cdot 60 = 120$ Zähne bekommen, dann würde das Getriebe jedesmal von 2 Zähnen seines Rades ganz können umgedreht werden, und ebenfalls das Getriebe 60mal herum kommen, indem das Rad sich nur einmal umdreht. Hat das Getriebe 3 Triebstöcke, so muß sein Rad $3 \cdot 60 = 180$ Zähne

bekommen, wenn das Getriebe bei einer Umdrehung seines Rades 60mal herum kommen soll. Denn alsdann drehen jedesmal drei Zähne des Rades das Getriebe ganz herum. Man sieht also, daß das Rad so vielmal 60 Zähne bekommen muß, so viel das Getriebe Triebstöcke hat. Hat das Getriebe 8 Triebstöcke, so muß das Rad 8 . 60 = 480 Zähne bekommen.

Will man lieber zwei Räder verfertigen, da ein einziges Rad zu viel Zähne bekäme, folglich zu groß würde, so darf man nur die Zahl der Umdrehungen in so viel Faktoren zerfällen, als Getriebe werden sollen; hierin 2 Faktoren. 60 = 6 . 10. Wenn man also macht, daß sich das erste Getriebe 6mal, das zweite 10mal bei jedesmaliger Umdrehung des ersten Rades umdreht, so ist der Aufgabe Genüge geleistet. Das erste Rad behandle man eben so, wie das einzige Rad und Getriebe, da sich das Getriebe 60mal umdrehen sollte. Man gebe nemlich dem Rade so vielmal 6 Zähne, als das Getriebe Triebstöcke hat, daß sich das Getriebe zum Rade verhält, wie 1 : 6

$$\text{Getriebe} : \text{Rade} = 1 : 6$$
$$\beta : x = 1 : 6$$

$$\frac{x \cdot 1}{\beta} = 6$$

$$\frac{x}{\beta} = 6$$

Giebt man dem Getriebe 8 Triebstöcke, so muß das Rad 8 . 6 = 48 Zähne bekommen.

Das zweite Rad behandelt man auf diese nemliche Art. Dieses Rad soll einmal herumkommen, indem sich sein Getriebe 10mal herum dreht. Es muß daher auch hier

$$\begin{aligned} \text{Getriebe} : \text{Rad} &= 1 : 10 \\ \gamma : \varrho &= 1 : 10 \\ \hline \frac{\varrho}{\gamma} &= 10. \end{aligned}$$

So viel das Getriebe $= \gamma$ Triebstöcke hat, so vielmal 10 muß das Rad Zähne bekommen. Man nehme für das Getriebe 6 Triebstöcke, so bekommt das Rad $6 \cdot 10 = 60$ Zähne. Das Getriebe geht also bei einer Umdrehung des Rades 10mal herum.

Indem das erste Rad sich einmal herum dreht, so dreht sich sein Getriebe mit dem daran befestigten zweiten Rade 6mal herum. Das zweite Rad dreht sich einmal, wenn sich sein Getriebe 10mal herum bewegt; dreht sich das Rad 6mal um, so geht das Getriebe $6 \cdot 10 = 60$mal herum. Indem also das erste Rad sich einmal umdreht, dreht sich sein Getriebe 6mal, und das Getriebe des zweiten Rades 60mal herum.

Sollen drei Räder gemacht werden, so zerfälle man 60 in drei Faktoren, $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Das erste Rad muß so vielmal 3 Zähne haben, so viel sein Getriebe Triebstöcke hat, wenn sich das Getriebe bei einmaliger Umdrehung seines Rades dreimal umdrehen soll; deßwegen muß, wenn das Getriebe 6 Triebstöcke hat, das Rad $3 \cdot 6 = 18$ Zähne bekommen. Das zweite Getriebe habe 8 Triebstöcke, so muß das Rad $8 \cdot 4 = 32$ Zähne bekommen, weil bei einer einzigen Umdrehung des Rades das Getriebe 4mal herum kommen soll. So, wenn das dritte Getriebe 10 Triebstöcke hat, und sich 5mal bei einer Umdrehung seines Rades herum bewegen soll, muß das Rad $10 \cdot 5 = 50$ Zähne bekommen.

Bei einer Umdrehung des ersten Rades dreht sich nun sein Getriebe mit dem an ihm befestigten Rade 3mal um; das zweite Getriebe 4mal, indem sein Rad einmal herum kommt; folglich, wenn das Rad sich 3mal umdreht, so kommt sein Getriebe 3 . 4 = 12mal herum. Das dritte Rad einmal, sein Getriebe 5mal; wenn das Rad 12mal herum geht, so dreht sich sein Getriebe 12 . 5 = 60mal herum. Es ist also auch auf diese Art durch drei Räder der Aufgabe, daß sich ein Getriebe 60mal bei einer einzigen Umdrehung eines Rades herum bewegen soll, Genüge geleistet.

Von Scheiben und Kloben.

87.

Weil CA und BQ auf FO senkrecht stehen, so sind sie Parallelen, folglich ist der Winkel ABO = CAB, und in den Dreiecken AQB und CDA sind die genannten Winkel gleich, weil beide Rechte sind. Daher ist $\triangle ACD \backsim ABQ$ und daher

$$CA : AD = AB : BQ$$
$$AD = BD$$

$$CA : BD = AB : BQ$$

$$BQ = \frac{AB \,.\, BD}{CA}$$

In der letzten Zeile des Buchs Seite 50. der Ausgabe von 1780, und Seite 54 in der zweiten Zeile von unten, der Ausgabe von 1792 steht F . BQ = P . BD, daselbst setze man den hier gefundenen Werth von BQ, so kommt

$$F \cdot \frac{AB \cdot BD}{CA} = P \cdot BD$$

BD div.

$$F \cdot \frac{AB}{CA} = P$$

$$F \cdot AB = P \cdot CA$$

$$F : P = CA : AB$$ (Ar. V, 33.)

88.

Wenn EB mit AF parallel wird, so wird $AB = 2r = 2AC$, und dann heist die Proportion

$$F : P = CA : AB$$
$$AB = 2AC$$

$$F : P = CA : 2AC$$

$$F : P = 1 : 2$$

$$F \cdot 2 = P \cdot 1$$

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot P$$

Ziehen also die Seile parallel, so ist nur halb so viel Kraft nöthig, als man Last hat, ein Gleichgewicht hervorzubringen.

89.

Wenn $CA = r$; $AB = 2AD = 2BD = 2c$; der Winkel $ACD = \varphi$, so ist in dem Dreiecke ACD

$$AC : AD = 1 : \sin ACD$$
$$r : c = 1 : \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{c \cdot 1}{r}$$

$$\sin \varphi = \frac{c}{r}$$

In den beiden Dreiecken ACD und ACO, ist der Winkel ACO beiden gemein, und CAO = ADC = R, folglich ist

$$AOC = CAD = 90^\circ - \varphi$$
$$2\ AOC = AOB$$

$$2\ AOC = AOB = 2\ (90^\circ - \varphi)$$

$$2\ AOC = AOB = 180^\circ - 2\ \varphi$$

In 65, III, 1) hat man

$$f : p = \sin \alpha : \sin \eta$$

Man setze f = P; p = F; $\sin \alpha = \sin AOB$; $\sin \eta = \sin BOD$, so ist

$$P : F = \sin AOB : \sin BOD \text{ oder}$$
$$F : P = \sin BOD : \sin AOB$$

Weil im Dreiecke BOC bei B ein rechter Winkel ist, so ist $\sin BOC = \sin BOD = \cos \varphi$; folglich

$$F : P = \cos \varphi : \sin AOB$$

In dem Vierecke CAOB sind bei A und B rechte Winkel, folglich AOB + ACB = 2 R, diese haben einerlei Sinus (Trig. 2 Erkl. 2 Z.) daher

$$\sin AOB = \sin ACB \text{ und also}$$

$$F : P = \cos\varphi : \sin ACB$$
$$ACB = 2\,\varphi \quad (p.\,f.)$$

$$F : P = \cos\varphi : \sin 2\,\varphi$$
$$\sin 2\,\varphi = 2 \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \quad \text{(Trig. 19. S. 5. Z.)}$$

$$F : P = \cos\varphi : 2 \sin\varphi \,.\, \cos\varphi$$

$$F \,.\, 2 \sin\varphi \,.\, \cos\varphi = P \,.\, \cos\varphi$$

1) $F \,.\, 2 \sin\varphi = P$

Wenn AB immer nach C zu rückt, und sich die Seile immer mehr und mehr zweien Parallelen nähern, bis AB dem Durchmesser gleich wird, so wird ACB eine gerade Linie, folglich der Winkel ACO = ACD = $\varphi = 90^\circ$, und der $\sin 90^\circ = r = 1$. Deswegen wird aus

$$F \,.\, 2 \sin\varphi = P \quad (1)$$

$$F \,.\, 2 \,.\, 1 = P$$

$$F \,.\, 2 = P$$

$$F = \tfrac{1}{2}\,P$$

Wenn AB ein Durchmesser ist, und wieder rückwärts abnimmt, so kommen die Berührungspunkte A und B immer näher zu sammen, und ACD = φ wird immer kleiner. Hingegen der Winkel AOC, folglich auch der doppelte, wächst.

In Trig. 5. Erkl. 1. Z. steht

$$\sin x : r = r : \operatorname{cosec} x$$

Statt x setze man hier φ, so kommt

$$\sin \phi : r = r : \text{cosec}\, \phi$$
$$r = 1$$

$$\sin \phi : 1 = 1 : \text{cosec}\, \phi$$

$$2)\ \sin \phi = \frac{1}{\text{cosec}\, \phi}$$

Es war $F \cdot 2 \sin \phi = P$ (1)

$$\sin \phi = \frac{1}{\text{cosec}\, \phi} \quad (2)$$

$$F \cdot 2 \cdot \frac{1}{\text{cosec}\, \phi} = P$$

$$F \cdot \frac{1}{\text{cosec}\, \phi} = \tfrac{1}{2} P$$

$$\frac{F}{\text{cosec}\, \phi} = \tfrac{1}{2} P$$

$$F = \tfrac{1}{2} P \cdot \text{cosec}\, \phi$$

Je kleiner ACB, folglich auch ACD = ϕ wird, desto größer wird der Winkel, welcher ihn zu 90° ergänzt, folglich desto größer cosec ϕ. Je größer cosec ϕ wird, desto größer wird das Produkt $\frac{1}{2}$ P . cosec ϕ = F. Je kleiner daher ACB wird, desto größer muß die Kraft werden.

93.

Die Seile werden, da die Rollen beweglich sind, alle gleich stark gespannt, folglich wird die Last unter die Seile alle vertheilt, und die Kraft hat also nur den sovielsten Theil der Last zu halten, als Seile sind. Es werden aber allezeit doppelt so viel Seile seyn, als untere Rollen sind. Das letzte Seil, welches wieder über eine obere Rolle ge-

gangen ist, und an welchem man zieht, darf nicht mit gerechnet werden, weil das Stück RS eben so stark gespannt ist, als QP. Wenn die Anzahl der Rollen = n, so ist die Kraft $= \frac{1}{2 . n} . S$; folglich

$$2n : 1 = S : \frac{1}{2n} . S$$

Von der schiefen Fläche.

95.

Wer sich nicht bequem in die perspektivische Zeichnung finden kann, der wird wohl thun, wenn er sich ein kleines Modell, etwa von Pappe macht. Ein Stück Pappe biege man keilförmig, daß die kürzeste Seite perpendikular auf der einen Seite steht, wie der Winkel GBD der 16. Figur es deutlich zeigt. Die längste Seite durchschneide man in der Mitte, daß man ein stark Stück Papier senkrecht auf die unterste Ebene, welche die Horizontalebene heißen soll, hindurch stecken kann. Auf dieses Blatt Papier und die Pappe, in welche es eingesteckt ist, wird man die verlangten Linien leicht so verzeichnen können, wie sie im Buche angegeben sind, alsdann wird auch die ganze Demonstration keine Schwierigkeit haben.

98.

Zieht man mit CJ durch L eine Parallele, so schneidet diese von CW die Kraft ab, welche mit GD parallel gehen soll; diese ist = JL. Die Kraft = S, mit welcher der Körper auf die schiefe Ebene drückt, werde durch CJ; die, welche muß angewendet werden, den Körper auf-

zuhalten, durch JL; des ganzen Körpers Last = Q, durch CL ausgedrückt (62); so ist

$$1)\ F : Q = JL : CL$$

Der Winkel CJL = LJD = R; JLC = JLD, weil beide Vertikalwinkel sind; folglich ist

$$2)\ JCL = D$$

und in dem Dreiecke JLC ist

$$\begin{array}{l} JL : CL = \sin JCL : 1 \\ F : Q = JL : CL\ (1) \\ \hline F : Q = \sin JCL : 1 \\ \quad JCL = D\ (2) \\ \hline A)\ F : Q = \sin D : 1 \\ \hline 3)\ F = Q \cdot \sin D \end{array}$$

Auch ist

$$\begin{array}{l} CJ : CL = \cos JCL : 1 \\ \quad JCL = D\ (2) \\ \hline CJ : CL = \cos D : 1 \\ S : Q = CJ : CL \\ \hline B)\ S : Q = \cos D : 1 \\ \hline 4)\ S = Q \cdot \cos D \end{array}$$

Exempel. Man nehme Q = 64 Pf.; D = 20°; so ist log F = log Q + log sin D (3)

$$\log \sin D = 9{,}5340517$$

Von diesem Logarithmen muß man 10 abziehen, den Logarithmen des Sinus von D für den Halbmesser 1 zu bekommen (Trig. Vorerinn. 5. von der 19. S.) Man hat also für

$$\log \sin D = 9{,}5340517$$
$$10$$
$$0{,}5340517 - 1$$ (Ar. VI. 33).

dazu $\log Q = 1{,}8061800$ addirt

$$\log F = 1{,}3402317$$

$F = 21{,}89$ Pf. (65 wegen der Auffindung der Zahl zu einem Logarithmen).

S zu finden, verfahre man eben so.

$$\log S = \log Q + \log \cos D$$
$$\log \cos D = 9{,}9729858$$
$$10$$
$$0{,}9729858 - 1$$
$$\log Q = 1{,}8061800$$
$$\log S = 1{,}7791658$$

$S = 60{,}14$ Pf. (65).

Es ist in dem rechtwinklichen Dreiecke CJL

$CL^2 = CJ^2 + JL^2$ (Geom. 15. S.) also

$$Q^2 = S^2 + F^2$$
$$Q^2 = 60{,}14^2 + 21{,}89^2$$
$$Q^2 = 3616{,}8196 + 479{,}1721$$

```
          3616,8196
           479,1721
     ─────────────────────
Q² = 40|95,99|17 † 63,9999 Pf. = Q
        36
       ───
        495
         123
        369
       ──────
        12699
         1269
        11421
        ──────
         127817
          12789
         115101
         ──────
          1271600
           127989
          1151901
          ───────
          11969900
           1279989
          11519901
          ────────
            449999
```

Es kommt hier nicht völlig wieder 64 Pf. für Q heraus, aber es fehlt auch nur noch 0,0001. Wie wenig dieß hier Einfluß hat, läßt sich leicht begreifen. Die Ursache, daß für Q hier etwas weniger als 64 herauskommt, ist folgende.

Es ist F = 21,89 Pf. etwas zu groß, hingegen S = 60,14 Pf. etwas zu klein gefunden worden, und S nicht so viel zu klein, als F zu groß, welches die Logarithmen dieser Zahlen deutlich genug zeigen; daher sollte man beim ersten Anblick glauben, es müsse auch $\sqrt{(F^2 + S^2)}$ etwas zu groß werden; aber man bedenke, daß der Unter-

schied der Quadrate zweier großen Zahlen größer ist, als der Unterschied der Quadrate zweier kleinen Zahlen, obgleich die zwei großen und kleinen Zahlen, von welchen man die Unterschiede der Quadrate vergleicht, selbst gleichviel unterschieden sind. Daher muß

$$21^2 - (21 - x)^2 < 60^2 - (60 - x)^2.$$

Nun soll x größer als y seyn, so kann doch noch statt finden, daß $21{,}89^2 - (21{,}89 - x)^2 < 60{,}14^2 - (60{,}14 - y)^2$. Da F = 21,89 Pf. mehr zu groß, als S = 60,14 zu klein ist, so ist hier doch der Fall, daß F^2 nicht so viel zu groß, als S^2 zu klein ist, weßwegen $F^2 + S^2$ etwas zu klein, folglich auch $\sqrt{(F^2 + S^2)}$ etwas zu klein werden muß.

99.

Entweder muß die Ebene .... dem Horizonte.

Die senkrechte Linie auf die schiefe Ebene ist von kleinern Theilen des Körpers unterstützt, deßhalb würde er sich nach der Ebene hinneigen, wenn nicht ein anderer Körper angebracht wäre, welcher dieses verhinderte; dieser Körper macht, daß die Direktionslinie des Schwerpunktes des Körpers gegen die Ebene in die Basis der Unterstützung fällt (48).

Man kann sich aber auch der schon ....

CL drückt die Last des Körpers = Q, LE die Kraft = P, CE den Druck bei angewandter Kraft auf die schiefe Ebenen = S aus, folglich ist

$$Q : P = CL : LE = \sin CEL : \sin LCE \text{ (Trig. 10. S.)}$$
$$CEL = ECV \text{ (Geom. 11. S.)}$$

A) $Q : P = \sin ECV : \sin LCE$

$S : Q = CE : CL = \sin CLE : \sin CEL$
$\sin CLE = \sin LCV$ (Trig. 2. Erkl. 2. Z.)

$S : Q = \sin LCV : \sin CEL$
$CEL = ECV$ (Geom. 11. S.)

B) $S : Q = \sin LCV : \sin ECV.$
$S : P = CE : LE = \sin CLE : \sin LCE$
$\sin CLE = \sin LCV$ (Trig. 2. Erkl. 2. Z.)

C) $S : P = \sin LCV : \sin LCE$

Wegen des rechten Winkels bei J ....

In den beiden Dreiecken JCL und LHD ist
$JLC = HLD$ (als Vertikalw.)
$CJL = LHD = R$

1) $JCL = HDL = D$
$CLJ + JCL = R$

T) $JCL = LCE = 90° - CLJ = D$ (1)
2) $ECV = LCV - LCE$ (*p.f.*) $= \gamma - D$

Man nehme die Proportion *A*) an, und setze statt ECV den hier gefundenen Werth

$Q : P = \sin ECV : \sin LCE$ (*A*)
$ECV = \gamma - D$ (2)

$Q : P = \sin(\gamma - D) : \sin LCE$
$LCE = D$ (*T*)

F) $Q : P = \sin(\gamma - D) : \sin D$
und $S : Q = \sin LCV : \sin ECV$ (*B*)
$LCV = \gamma$

$S : Q = \sin\gamma : \sin ECV$
$ECV = \gamma - D$ (2)

G) $S : Q = \sin\gamma : \sin(\gamma - D)$

$$S : P = \sin LCV : \sin LCE \;(C)$$
$$LCV = \gamma$$

$$S : P = \sin \gamma : \sin LCE$$
$$LCE = D \;(T)$$

$$S : P = \sin \gamma : \sin D$$

Wenn CV die Linie GD in A schneidet, so ist, weil alle drei Winkel des Dreiecks CAJ $= 180°$, der Winkel

$$CAD = CAJ = 180° - CJA - JCA$$
$$CJA = 90°$$

$$CAD = 180° - 90° - JCA$$

$$CAD = 90° - JCA$$
$$JCA = ACL - ECL$$

$$CAD = 90° - (ACL - ECL)$$
$$ACL = LCV = \gamma ; ECL = D \;(T)$$

$$CAD = 90° - (\gamma - D)$$

$$CAD = 90° - \gamma + D \;(\text{Ar. I, 97.})$$

$$CAD + \gamma - D = 90°$$

3) $\cos CAD = \sin (\gamma - D)$

Daher kann man den cos CAD statt des sin $(\gamma - D)$ in der Proportion *F*) und *G*) setzen.

$$Q : P = \sin (\gamma - D) : \sin D \;(F)$$
$$\sin (\gamma - D) = \cos CAD \;(3)$$

H) $Q : P = \cos CAD : \sin D$

$$S : Q = \sin \gamma : \sin (\gamma - D) \;(G)$$
$$\sin (\gamma - D) = \cos CAD \;(3)$$

I) $S : Q = \sin \gamma : \cos CAD$

Es sei Q $= 64$ Pf.; D $= 20°$; $\gamma = 62°$, so ist aus *H*)

$$P = \frac{Q \cdot \sin D}{\cos CAD}$$

$$P = \frac{64 \cdot \sin 20^\circ}{\cos CAD}$$

4) $\cos CAD = \sin(\gamma - D)(3) = \sin(62^\circ - 20) = \sin 42^\circ$

$$P = \frac{64 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 42^\circ}$$

K) $\log P = \log 64 + \log \sin 20^\circ - \log \sin 42^\circ$

$$\log 64 = 1{,}8061800$$
$$\log \sin 20^\circ = 9{,}5340517$$
$$11{,}3402317$$
$$\log \sin 42^\circ = 9{,}8255109$$
$$\log P = 1{,}5147208$$
$$P = 32 \text{ Pf.}$$

Sucht man aber den log P unter der Kennziffer 3 auf, so findet man 32,71 Pf. nach der Anleitung, welche in der Erläuterung des 65 §. ist gegeben worden. In Tafeln, welche die Logarithmen von größern Zahlen, als 10000 enthalten, findet man diesen Logarithmen mit der Kennziffer 4 bei der Zahl 32713, welches also P = 32,713 Pf. giebt. Hat man aber Tafeln, welche die Logarithmen nur bis 10000 enthalten, so kann man diese letzte Ziffer 3 auch durch Proportionaltheile finden.

Man suche den Unterschied der Logarithmen, zwischen welche der gesuchte Logarithme fällt, ferner den Unterschied des gesuchten und des nächst kleinern Logarithmen, und sage dann: Wie sich verhält der Unterschied der Logarithmen, zwischen welche der gesuchte Logarithme fällt, zu dem Unterschiede des gesuchten und des nächst kleinern Logarithmen;

so verhält sich 10 zu der Zahl, welche noch als die letzte Ziffer zu der Zahl muß gesetzt werden. Siehe die Fortsetzung der Rechenkunst des Autors, Seite 72. f. f.

Denn man nimmt an, daß sich die **Unterschiede** der Logarithmen so zu einander verhalten, wie die **Unterschiede** der Zahlen, zu denen sie gehören. Setzt man für den gefundenen Logarithmen 4,5147208, so fällt die Zahl, zu welcher dieser Logarithme gehört, zwischen 32710 und 32720. Man nenne das, was noch zu 32710 für den Logarithmen 4,5147208 fehlt, x, so ist log 32710 + x = 4,5147208.

$$\begin{array}{lcl} \log 32720 & = & 4{,}5148133 \\ \log 32710 & = & 4{,}5146805 \\ \hline \end{array}$$

Untersch. d. Zahlen 10, Untersch. d. Logar. 1328

$$\begin{array}{lcl} \log 32170 + x & = & 4{,}5147208 \\ \log 32170 & = & 4{,}5146805 \\ \hline x & & 403 \end{array}$$

Die Proportion ist also folgende:

$$1328 : 403 = 10 : x$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 1328 \,|\, 4030 \dagger 3 = x \\ 3984 \\ \hline 46 \end{array}$$

Dieser Quotient 3 = x muß also noch zu der Zahl 32710 addirt werden. Man bekommt also nun P = 32,713 Pf. Daher ist

$$\log 32713 = 4{,}5147208 \text{ und}$$
$$\log 32{,}713 = 1{,}5147208.$$

(Siehe hierüber das Ende der Erläut. von 65.)

Aus J) ist $S = \frac{Q \cdot \sin\gamma}{\cos CAD}$

$$S = \frac{64 \cdot \sin 62^\circ}{\cos CAD}$$

$$\cos CAD = \sin 42^\circ \quad (4)$$

$$S = \frac{64 \cdot \sin 62^\circ}{\sin 42^\circ}$$

$$\log S = \log 64 + \log 62^\circ - \log \sin 42^\circ$$

$$\log 64 = 1{,}8061800$$
$$\log \sin 62^\circ = 9{,}9459349$$
$$11{,}7521149$$
$$\log \sin 42^\circ = 9{,}8255109$$
$$\log S = 1{,}9266040$$
$$S = 84{,}45 \text{ Pf.}$$

S noch genauer zu finden.

$$\log 84460 = 4{,}9266511$$
$$\log 84450 = 4{,}9265997$$
$$10 \qquad 514$$

$$\log 84450 + x = 4{,}9266040$$
$$\log 84450 = 4{,}9265997$$
$$x \qquad 43$$

$$514 : 43 = 10 : x$$

$$x = \frac{43 \cdot 10}{514} = \frac{430}{514} \text{ beinah} = 1$$

Daher ist $\log 84451 = 4{,}9266040$

$$\log 84{,}451 = 1{,}9266040$$

also $S = 84{,}451$ Pf.

100.

Man betrachte die Figur V. der Erläut. wo die Kraft so wirkt, daß, wenn ihre Richtung rückwärts verlängert wird, diese Verlängerung die schiefe Ebene unter J in a schneidet. Hier ist nunmehr

1) $LC\alpha = \gamma$

In den beiden Dreiecken CJL und HLD ist JLC = HLD, und bei J und H sind rechte Winkel, folglich ist

2) $ECL = D$

$EC\alpha = LC\alpha - ECL$

$LC\alpha = \gamma$ (1); $ECL = D$ (2)

3) $EC\alpha = \gamma - D$

4) $CL = Q$

5) $EC = S$

6) $LE = P$

Es ist $CL : LE = \sin CEL : \sin EC\alpha$ (Trig. 10. S.)

$CL = Q$ (4); $LE = P$ (6)

$Q : P = \sin CEL : \sin ECL$

$CEL = EC\alpha$ (Geom. 11. S.)

$Q : P = \sin EC\alpha : \sin ECL$

$EC\alpha = \gamma - D$ (3)

$Q : P = \sin (\gamma - D) : \sin ECL$

$ECL = D$ (2)

A) $Q : P = \sin (\gamma - D) : \sin D$

Eben so ist

$$CE : CL = \sin ELC : \sin LEC \text{ (Trig. 10. S.)}$$
$$CE = S \ (5) ; \ CL = Q \ (4)$$

$$S : Q = \sin ELC : \sin LEC$$
$$\sin ELC = \sin LC\alpha \text{ (Trig. 2. Erkl. 2. 3.)}$$

$$S : Q = \sin LC\alpha : \sin LEC$$
$$\sin LEC = \sin EC\alpha \text{ (Tr. 2. Erkl. 2. 3.)}$$

$$S : Q = \sin LC\alpha : \sin EC\alpha$$
$$LC\alpha = \gamma \ (1) ; \ EC\alpha = \gamma - D \ (3)$$

$S : Q = \sin \gamma : \sin (\gamma - D)$ und weil auch
$Q : P = \sin (\gamma - D) : \sin D \ (A)$ so ist

$$S : P = \sin \gamma : \sin D \text{ (Ar. V, 51.)}$$

Es sey wieder $Q = 64$ Pf.; $D = 20^\circ$, und wenn die Kraft noch eben so groß seyn soll, als da die Richtung derselben die schiefe Ebene über J schnitt, so muß der Winkel $\gamma - D$ im ersten Falle mit dem Winkel $\gamma - D$, im gegenwärtigen 180° ausmachen, alsdann haben beide einerlei Sinus (Trig. 2. Erkl. 2. 3.). Es muß also hier $\gamma = 158^\circ$ seyn. Nun ist

$$C) \ \sin(\gamma - D) = \sin (158 - 20^\circ) = \sin 138^\circ = \sin 42^\circ$$

Ferner ist aus A)

$$P = \frac{Q . \sin D}{\sin (\gamma - D)}$$

$$P = \frac{64 . \sin 20^\circ}{\sin 42^\circ \ (C)}$$

$$\log P = \log 64 + \log \sin 20^\circ - \log \sin 42^\circ.$$

Es muß hier das nemliche, wie in 99, *K*) herauskommen, folglich auch hier die nemliche Kraft angewendet werden, obgleich die Richtung der Kraft rückwärts verlängert die schiefe Ebene schneidet.

Für S aber kann hier nicht so viel heraus kommen, weil der Körper nicht von der Kraft mehr an die schiefe Ebene gedrückt wird, sondern den Körper von der schiefen Ebene wegwärts hebt. Der $\sin\gamma$ wird auch kleiner, als im ersten Falle, da der Winkel, welcher ihn zu 180° ergänzt, und mit welchem er einerlei Sinus hat, kleiner ist. Aus *B*) ist

$$S = \frac{Q \,.\, \sin\gamma}{\sin(\gamma - D)}$$

$$S = \frac{64 \,.\, \sin 158^\circ}{\sin 42^\circ}\ (C)$$

$$\sin 158^\circ = \sin 22^\circ$$

$$S = \frac{64 \,.\, \sin 22^\circ}{\sin 42^\circ}$$

$$\log S = \log 64 + \log \sin 22^\circ - \log \sin 42^\circ$$

$$\begin{aligned} \log 64 &= 1{,}8061800 \\ \log \sin 22^\circ &= 9{,}5735754 \\ \hline & \ 11{,}3797554 \\ \log \sin 42^\circ &= 9{,}8255109 \\ \hline \log S &= 1{,}5542445 \end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Fällen ....

Der Winkel CAD wird o, wenn die beiden Linien CA und GD parallel werden, und dann ist $\cos 90^\circ = 0$, folglich $\cos CAD = \cos 0^\circ = 1$ (Trig. 3. Erkl. 3. Z.)

Man nehme die Proportion aus 99, *H*)

$$Q : P = \cos CAD : \sin D.$$ Man setze

$$\cos CAD = 1$$

$$Q : P = 1 : \sin D.$$ Es sey

$$P = F$$

$$Q : F = 1 : \sin D$$ oder

$$F : Q = \sin D : 1$$

Dieses ist die Proportion in 98, *A*)

Ferner setze man aus 99, *J*)

$$S : Q = \sin \gamma : \cos CAD$$ und

$$\cos CAD = 1$$

T) $S : Q = \sin \gamma : 1$

Weil nun CA und GD parallel seyn sollen, wie in fig. 17. YW und GD, so ist LCY oder $LCA = 90° + D$, das ist $\gamma = 90° + D$, folglich, da in fig. 17. CLJ der Ergänzungswinkel zu $JCL = D$ zu 90° ist, und $\sin CLJ = \sin LCY = \sin LCA$ ist, so ist $\cos D = \sin LCA = \sin \gamma$. Nun setze man in *T* statt $\sin \gamma$ den $\cos D$, so hat man

$$S : Q = \cos D : 1$$

welches die Proportion 98, *B*) ist.

Wenn die Richtung der Kraft ...

Nimmt man an, daß die Kraft in der Richtung HL aufwärts zieht, so wird dann A in L fallen, folglich der Winkel CAD und CLD einerlei seyn; daher

E) $\cos CAD = \cos CLD$

und weil $CLD + HLD = 180°$, so ist

$$\cos CLD = - \cos HLD$$ (Trig. 3. Erkl. 2. 3.)

Daher 7) $\cos CAD = - \cos HLD$ (*E*)

$$HLD + D = 90^\circ \quad (p. f.)$$

$$\cos HLD = \sin D \quad (\text{Trig. 3. Erkl.})$$

$$- \cos HLD = - \sin D$$

$$- \cos HLD = \cos CAD \quad (7)$$

8) $\cos CAD = - \sin D$

Nun setze man

$$Q : P = \cos CAD : \sin D \quad (99, H)$$

$$\cos CAD = - \sin D \quad (8)$$

$$Q : P = - \sin D : \sin D$$

$$Q . \sin D = - P . \sin D$$

$$Q = - P$$

101.

Aus 98, *A*) nehme man folgende Proportion

$$F : Q = \sin D : 1 \quad \text{und aus 99, } F)$$

$$Q : P = \sin(\gamma - D) : \sin D$$

$$F : P = \sin(\gamma - D) : 1 \quad (\text{Ar. V, 52.})$$

$$P : F = 1 : \sin(\gamma - D)$$

$$P . \sin(\gamma - D) = F . 1$$

Wenn nun $\sin(\gamma - D)$ nicht der Sinus totus ist, so ist P immer größer als F. Denn weil die beiden Produkte gleich seyn müssen, und die Sinus aller schiefen Winkel kleiner als der Sinus totus $= 1$, folglich Brüche sind, so muß P größer als F seyn, wenn P mit einem Bruche multiplizirt ein Produkt geben soll, welches F gleich ist. Daher braucht man die kleinste Kraft anzuwenden, wenn die Richtung der Kraft mit der schiefen Ebene parallel ist.

103.

Wenn CA mit DB parallel wird, so ist der Winkel CAD = D; oder in fig. 17. wo CX mit DB parallel gezogen ist, ist CXD = D, daher

1) cos CAD = cos CXD = sin XLC = sin HLD = sin G.

Will man durch JL die Kraft P ausdrücken, so muß JL parallel mit XC seyn, damit bei L der rechte Winkel zu stehen kommt. Nun ist

$$Q : P = \cos CAD : \sin D \quad (99, H)$$
$$\cos CAD = \sin G \quad (1)$$

$$Q : P = \sin G : \sin D = GB : BD \text{ (Trig. 10. S.)}$$

Von der Schraube.

106.

Auch hier ist zu rathen, sich ein Modell zu verfertigen. Man nehme nemlich ein rundes Stückchen Holz, oder etwas ähnliches, befestige an dasselbe ein rechtwinklich geschnittenes Papier, von der Gestalt wie DBG fig. 17, und lege es um den Zylinder, so wird, wenn BD dem Umfange des Zylinders gleich ist, das Rechteck einen Schraubengang bilden. Man schreibe noch an die Orte die dahin gehörigen Buchstaben, so wird alles sehr leicht zu verstehen seyn.

In der Figur ist QFPOT nur ein Stück eines Zylinders, wozu QF die Axe und PT der Bogen an der Grundfläche ist. QD ist GD in fig 17, und PT die Linie BD, QPE ist die Fläche GDB aber noch nicht aufgewickelt.

108.

Man muß hier die Fig. 17 nnd 19 zugleich vor Augen haben, oder besser die Fig. 17 und das Modell.

109.

Die kleine Ebene QPpq muß man als gar sehr klein annehmen, alsdann kann man sie als gar nicht gebogen ansehen, folglich, wenn man Qq und Pp verlängert, müssen sich beide Verlängerungen in E scheiden.

123.

Es ist in dem rechtwinklichen Dreiecke LKG

$$LG^2 = GK^2 - LK^2 \quad \text{(Geom. 15. S.)}$$
$$LK = r$$

$$LG^2 = GK^2 - r^2$$
$$GK = KH + HG \quad (p. f.)$$

$$LG^2 = (KH + HG)^2 - r^2$$
$$KH = r \quad (p. f.)$$

$$LG^2 = (r + HG)^2 - r^2$$

$$LG^2 = r^2 + 2\,r\,HG + HG^2 - r^2$$

$$1)\; LG^2 = HG^2 + 2\,r\,HG$$

Die Erhebung der scheinbaren Horizontallinie über die wahre, ist in Vergleichung mit zwei Halbmessern der Erde sehr gering, also HG sehr gering, daher wird auch das Quadrat von HG sehr gering in Vergleichung mit dem Durchmesser der Erde seyn. Deßwegen kann man HG^2 füglich weglassen, und setzen

$$LG^2 = 2\,r\,HG$$

$$2)\; \frac{LG^2}{2\,r} = HG$$

Will man dieses HG genauer finden, und den kleinen Fehler vermeiden, den man bei Weglassung des HG^2 begeht, so kann man den Werth von HG durch algebraische Rechnung bestimmen.

$$LG^2 = GH^2 + 2\,r\,HG \quad (1)$$

r^2 addirt

$$LG^2 + r^2 = GH^2 + 2\,r\,GH + r^2$$

die Wurzel ausgezogen

$$\sqrt{(LG^2 + r^2)} = GH + r$$

$$3)\ \sqrt{(LG^2 + r^2)} - r = GH$$

Hier ist GH ganz genau bestimmt, ohne GH^2 wegzulassen. Den Unterschied zu sehen, welchen beide Formeln geben, wollen wir beide nach Picards Angabe des Halbmessers der Erde auflösen.

Die erste Formel durch Hülfe der Logarithmen. Es sey $2\,r = 6538594$ Toisen, wofür man $2\,r = 6538600$ annehmen kann, $LG = 4000$ Toisen

$$\frac{LG^2}{2\,r} = GH \quad (2)$$

$$\log GH = \log LG - \log 2\,r + \log LG$$

Ehe wir die Berechnung des GH selbst vornehmen, soll gelehrt werden, wie der Logarithme von 6538600 zu finden ist.

Man setze voraus, die Unterschiede nicht gar zu sehr unterschiedener Zahlen verhalten sich wie die Unterschiede ihrer Logarithmen. Hat man den Logarithmen für 65386 gefunden, so ist der für 6538600 sehr leicht zu finden, indem man nur die Kennziffer um so viel Einheiten zu vermehren hat, als man Nullen an die Zahl hängt. Es ist also nur log 65386 zu finden. Die Zahl 65386 fällt zwischen 65390 und 65380, die Logarithmen dieser Zahlen sind ebenfalls leicht zu finden, indem man nur die Kennziffern der Logarithmen der Zahlen 6539 und 6538 um 1 vermehren darf.

Aus den Tafeln nehme man also die Logarithmen dieser Zahlen, vermehre ihre Kennziffern um 1, und suche den Unterschied der Logarithmen, ingleichen auch den Unterschied der Zahlen, zu welchen die Logarithmen gehören, dieser wird beständig 10 seyn; alsdann suche man aber auch den Unterschied der gegebenen Zahl und der nächst kleinern von denen, zwischen welche sie fällt; dieser Unterschied ist allezeit die fünfte Ziffer der gegebenen Zahl, hier 6. Den Unterschied der Logarithmen der Zahl und der nächst kleinern, nenne man x. Das x aber ist keine ganze Zahl, sondern allemal Zehnmilliontheilchen, so wie auch der Unterschied der Logarithmen der Zahlen, zwischen welche die gegebene Zahl fällt, immer Zehnmilliontheilchen sind.

$$\log 6539 \cdot 10 = \log 65390 = 4{,}8155114$$
$$\log 6538 \cdot 10 = \log 65380 = 4{,}8154449$$

Untersch. der Zahlen 10, Untersch. d. Log. 665

$$\log 65386 = 4{,}8154449 + x$$
$$\log 65380 = 4{,}8154449$$

Untersch. d. Zahlen 6, Untersch. d. Log. x

Nun setze man die Proportion an

$$10 : 6 = 665 : x$$

$$x = \frac{665 \cdot 6}{10} = \frac{3990}{10} = 399$$

Diese 399 Zehnmilliontheilchen müssen also zu log 65380 addirt werden

$$\log 65380 = 4{,}8154449$$

Untersch. d. Zahlen 6, Untersch. d. Log. 399

$$\log 65386 = 4{,}8154848$$

Nun vermehre man die Kennziffer durch so viel Einheiten, als Nullen an der Zahl hängen, so hat man den völligen Logarithmen für die angegebene Zahl. Es ist also

$$\log 6538600 = 6{,}8154848.$$

Jetzt kann man die Rechnung wie gewöhnlich anstellen.

$$\log LG = \log 4000 = 3{,}6020600$$
$$\log 2r = \log 6538600 = 6{,}8154848$$

$$\log \frac{LG}{2r} = \log \frac{4000}{6538600} = 0{,}7865752 - 4$$

(Ar. VI, 33.)

$$\log LG = \log 4000 = 3{,}6020600$$

$$\log \frac{LG^2}{2r} = \log GH = 0{,}3886352$$

$$GH = 2{,}4470 \text{ Toisen},$$

oder weil 1 Toise = 6 Schuh, so ist

$$GH = 6 \,.\, 2{,}4470 = 14{,}6820 \text{ Fuß}.$$

$$\log \frac{LG}{2r} = \log \frac{4000}{6538600} = 0{,}7865752 - 4$$

giebt für A) $\frac{LG}{2r} = 0{,}00061175.$

Wenn man GH nach der algebraischen Formel sucht, so ist

$$\sqrt{(LG^2 + r^2)} - r = GH \quad (3)$$
$$LG = 4000$$

4) $LG^2 = 16000000$

$$2r = 6538594$$
$$r = 3269297$$

```
          3269297
          3269297
         ________
         22885079
        29423673
        6538594
      29423673
      19615782
      6538594
     9807891
    ______________
r² = 10688302874209
LG² =      16000000   (4)
_________________________
     10|68|83|18|87|42|09 † 3269299,4470
      9
     ___
     168
      62
     124
     ___
      4483
       646
      3876
     _____
       60718
        6529
       58761
      ______
        195787
         65382
        130764
       _______
         6502342
          653849
         5884641
        ________
          61770109
           6538589
          58847301
         _________
           292280800
            65385984
           261543936
          __________
```

```
 3073686400
  653859884
 2615439536
-----------
 45824686400
  6538598887
 45770192209
------------
   5449419100
   6538598894
```

$\sqrt{(LG^2 + r^2)} = 3269299,4470$

$r = 3269297$

$\sqrt{(LG^2 + r^2)} - r = 2,4470$ Toisen.

Man sieht, daß, ob man gleich bei der ersten Rechnung GH^2 weggelassen hat, die Rechnung doch völlig genau zutrift. Wie sehr die erste Berechnung, ihrer Bequemlichkeit wegen, vorzuziehen ist, ist offenbar.

124.

Es ist in 123, *A*) gefunden worden, daß

$$\frac{LG}{2r} = 0,00061175 \text{ sey}$$

2 multipl.

$$\text{I)}\ \frac{LG}{r} = 0,00122350$$

In dem Dreiecke LKG ist aber

$$LK : LG = \sin tot : \text{tang}\ LKG$$

$$\text{tang}\ LKG = \frac{LG . \sin tot}{LK}$$

$$LK = r$$

$$\text{tang}\ LKG = \frac{LG . \sin tot}{r}$$

$$\sin tot = 1$$

$$\text{tang}\ LKG = \frac{LG}{r} = 0,00122350\ (\text{I})$$

Diese Tangente suche man in den Tafeln auf, so findet man für den Winkel LKG = 4′. Hat man Tafeln, wo die Sekunden nicht mit angegeben sind, so muß man sie durch Proportionaltheile finden. Das Verfahren ist in Trig. 2. S. 6. Anmerk. gelehrt worden. Zur Wiederholung will ich es hier noch einmal beibringen.

Man setzt voraus, daß die Unterschiede der Tangenten nicht viel von einander unterschiedener Bögen, sich wie die Unterschiede der Bögen selbst verhalten. Man suche also den Unterschied der Tangenten, zwischen welche die gesuchte Tangente fällt, und deren zugehörige Winkel um $1' = 60''$ unterschieden sind; dann aber auch dem Unterschied der gesuchten Tangente und der nächst kleinern. Es sei der Winkel, zu welchem die Tangente gehört, um x″ größer als 4′.

$$\text{tang } 5' = 0{,}0014544$$
$$\text{tang } 4' = 0{,}0011636$$

Untersch. d. Bögen 60″, Untersch. d. Tang. 2908

$$\text{tang } 4' + x'' = 0{,}0012235$$
$$\text{tang } 4' = 0{,}0011636$$

Untersch. d. Bögen x″, Untersch. d. Tang. 599

Nun setze man

$$2908 : 599 = 60'' : x''$$

$$x = \frac{599 \cdot 60}{2908} = \frac{35940}{2908} = 12''$$

Der ganze Winkel also, dem die Tangente 0,0012235 zugehört, ist $= 4'\,12'' =$ LH.

Tangente und Sinus sind bei diesem Bogen noch nicht 0,0000001 des Halbmessers unterschieden, folglich Tangente und Bogen noch weniger. Gesetzt aber, es sey

der Unterschied der Tangente und des Bogens 0,0000001 für den Halbmesser = 1, so kann man fragen, wie groß der Unterschied dieses nämlichen Bogens von 4′ 12″ und seiner Tangente für den Halbmesser 3000000 Toisen sey? dieser Halbmesser sey für den Halbmesser der Erde, statt 3269347 gesetzt. Man sagt also

$$1 : 0{,}0000001 = 3000000 : x$$

$$x = \frac{0{,}0000001 \,.\, 3000000}{1}$$

$$x = 0{,}3 \text{ Toisen.}$$

Dieser Unterschied ist noch lange nicht 0, 4 Toisen; er ist aber mehr als 0, 3 Toisen, weil der Halbmesser der Erde größer als 3000000 ist. Man hat also um 0, 3 Toisen gefehlt, wenn man statt LH die Linie LH gemessen hat. Daß man diese 0, 3 Toisen zu wenig gemessen hat, trägt wohl bei 4000 Toisen nichts merkliches aus. Bei Distanzen, welche kleiner, als 4000 Toisen sind, beträgt dieser Fehler natürlich noch weniger, als 0, 3 Toisen.

Die Windmühlen.

132.

Mit einem kleinen Modell wird man hier am besten zurecht kommen können. Man mache ein Stück Pappe viereckig, so daß die zwei längsten gegenüber stehenden Seiten gleich, aber nicht parallel und die beiden andern gegenüber stehenden parallel aber ungleich sind; daß also PN = OE, und Po > NE aber parallel sind, damit es einem gewöhnlichen Windmühlenflügel ähnlich sieht. Man theile ferner die Ebene durch die Linie HC in zwei gleiche und ähnliche Theile, indem man CH bis oben hin verlängert, so werden alsdann HCN und HCE rechte Winkel.

Ein rundes Stückchen Holz oder Drath stelle die Welle CA vor, auf welcher man die Ebene PNOE so befestigen kann, daß ACH = R, nicht aber daß der Winkel ACE dem ACN gleich sei, sondern daß ACE kleiner, als ein rechter Winkel ist.

133.

Durch ACH und ACE stelle man sich Ebenen gelegt vor, so schneiden sich die Ebene ACH und die Ebene des Flügels in HC; folglich sagt man, HC sey der Durchschnitt der Ebene ACH und des Flügels. Perpendikel in beiden Ebenen auf ihren Durchschnitt gezogen, machen den Neigungswinkel der Ebenen (Geom. 2. Th. 2. Erkl.). Da nun EC in der Ebene des Flügels und AC in der Ebene AHC senkrecht auf HC ist, so ist der Winkel ACE der Neigungswinkel der Ebene ACH und des Flügels. EC und CA, beide in der Ebene ACE, stehen auf HC, dem Durchschnitte der Ebene ACH, und des Flügels senkrecht, daher steht die Ebene ACE auf dem Flügel und auf der Ebene ACH senkrecht (Geom. 47. S. 4. Z.). Weil nun EC der Durchschnitt der Ebene und des Flügels ist, so muß jedes Perpendikel, aus A auf den Flügel gefällt, in EC fallen.

Der Neigungswinkel der Axe gegen den Flügel ist auch der nemliche Winkel ACE, den die Ebene CHA mit dem Flügel macht. Es sey dieser Winkel

I) $ACE = \gamma$

134.

Man nehme auf dem Flügel einen Punkt P ausser der Linie HC auf der linken Seite derselben an, und ziehe PC auf dem Modelle, auch stelle man die Linien AP, AH und AE, welche letzte senkrecht auf EC ist, durch einen Faden

oder schwachen Drath vor, und verlängere die Axe AC auf der entgegengesetzten Seite des Flügels. Weil nun der Winkel ACH ein Rechter ist, so muß ACP größer als ein Rechter seyn. Man fälle von P auf die verlängerte Axe ein Perpendikel, dieses heiße PQ, so entsteht ein Dreieck PCQ, wo bei Q ein rechter Winkel ist. Bewegt sich der Flügel um seine Axe, so beschreibt dieses rechtwinkliche Dreieck einen senkrechten Kegel, dessen Seite CP und Axe CQ ist, welche in die Verlängerung AC fällt, und C ist die Spitze des Kegels, oder weil die Grundfläche dieses Kegels ein Kreis ist, so ist C der Pol des Kreises der von dem Punkte P beschrieben wird. Rückt P nach der Mitte des Kegels zu fort, so wird der Winkel ACP und die Axe des Kegels immer kleiner; fällt P in die Linie HC, so ist ACP ein rechter Winkel, und die Axe CQ = o; folglich kann nun kein Kegel statt finden, sondern P beschreibt nur einen Kreis, dessen Mittelpunkt C, und Halbmesser CP ist.

Nimmt man P zwischen OE und HC an, so wird der Winkel ACP kleiner, als ein Rechter, und ein Perpendikel PQ von P auf die Axe gefällt, wird in AC fallen. Daher beschreibt wieder das Dreieck QPC einen Kegel, dessen Seite CP und Axe CQ ist; welche Axe aber in der Axe des Flügels selbst, nicht in der Verlängerung derselben liegt. Der Pol des Kreises, den P beschreibt, ist wieder C. Die Spitzen aber der beiden Kegel, welche von P beschrieben werden, wenn man P einmal auf der linken, das andere mal auf der rechten Seite von HC annimmt, stoßen zusammen.

Wenn AE ein Loth auf dem Flügel ist, und

$$1)\ AC = b$$

so ist in dem Dreiecke ACE

$$r : \sin ACE = AC : AE$$

$$AE = \frac{AC \cdot \sin ACE}{r}$$

$$r = 1$$

$$AE = AC \cdot \sin ACE$$

$$AC = b \ (1)$$

$$AE = b \cdot \sin ACE$$

$$ACE = \gamma \ (133, 1)$$

2) $AE = b \cdot \sin \gamma$

Ferner ist in dem nämlichen Dreiecke

$$r : \sin CAE = AC : CE$$

$$CE = \frac{AC \cdot \sin CAE}{r}$$

$$r = 1$$

$$CE = AC \cdot \sin CAE$$

$$AC = b \ (1)$$

$$CE = b \cdot \sin CAE$$

$\sin CAE = \cos \gamma$, weil $ACE = R$

3) $CE = b \cdot \cos \gamma$

Es sind PC und PCE gegeben, indem der Punkt P angenommen worden ist, auch hat man in 3) die Linie CE gefunden, aus diesen drei Stücken in dem Dreiecke CPE läßt sich EP finden, (Trig. 15. S.). Es ist

$$PC+CE : PC-CE = \text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP+CPE) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP-CPE)$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP-CPE) = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP+CPE) \,.\, (PC-CE)}{PC+CE}$$

$$CEP + CPE = 2R - PCE$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP-CPE) = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(2R-PCE) \,.\, (PC-CE)}{PC+CE}$$

$$\tfrac{1}{2}(2R - PCE = R - \tfrac{1}{2}CPE$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP-CPE) = \frac{\text{tang}(R-\tfrac{1}{2}PCE) \,.\, (PC-CE}{PC+CE}$$

$$CE = b \,.\, \text{cos}\,\gamma \quad (3)$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(CEP-CPE) = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(R-\tfrac{1}{2}PCE) \,.\, (PC-b\,.\,\text{cos}\,\gamma)}{PC+b\,.\,\text{cos}\,\gamma}$$

Hieraus findet man also die halbe Differenz der beiden Winkel CEP und CPE; die halbe Summe ist $= R - \tfrac{1}{2}PCE$, zu dieser addirt man die halbe Differenz, so bekömmt man den großen Winkel; der größere Winkel ist aber allemal der, welcher der größern Seite gegenüber steht, folglich hier CEP. Also

4) $CEP = R - \tfrac{1}{2}PCE + \tfrac{1}{2}(CEP-CPE)$
$CPE = R - \tfrac{1}{2}PCE - \tfrac{1}{2}(CEP-CPE$ (Trig. 13. S.)

Da man nun noch den Winkel CEP im Dreiecke PCE weiß, so kann man PE nach Trig. 10. S. finden. Es sind PC, PCE und CEP (4) bekannt, hieraus ist

$$\text{sin}\,CEP : \text{sin}\,PCE = CP : PE$$

$$5)\quad PE = \frac{CP \,.\, \text{sin}\,PCE}{\text{sin}\,CEP}$$

Das Dreieck APE ist bei E rechtwinklich, weil AE auf dem Flügel lothrecht steht, daher ist

$$AP = \sqrt{(EP^2 + AE^2)} \text{ (Geom. 15. S.)}$$
$$AE = b \,.\, \sin\gamma \text{ (2)}$$

$$6)\ AP = \sqrt{(EP^2 + b^2 \,.\, \sin\gamma^2)}$$

Im Dreiecke PCA ist (wenn man sich AP von Draht, oder einem Faden im Modell macht) PC, AC gegeben, und AP (6) gefunden worden, folglich sind alle drei Seiten bekannt. Daraus kann man den Winkel PCA finden nach Trig. 20. S. Es ist nemlich

$$\sin PCA = \frac{\sqrt{((PA + PC + AC) \,.\, (PC + AC - PA) \,.\, (PA + AC - PC) \,.\, (PA + DC - AC))}}{2\ PC \,.\, AC}$$

Durch Logarithmen ließ sich dieser Winkel bequem berechnen, wenn es nöthig wäre, ihn zu wissen, man müßte aber die Bemerkung 22. des 20. S. der Trig. beobachten. Man braucht diesen Winkel nicht, als nur zu sehen, daß er für jeden gegebenen Punkt P in dem Flügel bei Umdrehung desselben, ganz ungeändert bleibt, wenn nur die Ebene ACE immer senkrecht auf die Ebene des Flügels, und der Winkel ACE bei der Umdrehung der nemliche bleibt.

136, V, VI, VII, VIII.

Wenn in einer Sekunde eine gewisse Menge Lufttheilchen an die Ebene stoßen, so empfängt die Ebene den Stoß eines jeden Lufttheilchens, also so viel Stöße in einer Sekunde, als Lufttheilchen in derselben anstoßen. Je schneller die Luft geht, desto mehr Lufttheilchen stoßen an die Ebene; und je geschwinder sie anstoßen, desto stärker sind diese Stöße.

Gesetzt, es bewege sich in einer Sekunde ein Lufttheilchen durch den Raum HG = c = 8 Fuß, so werden in

einer Sekunde alle Lufttheilchen, welche sich in dem Raume c befinden, an die Ebene stoßen. Nun sollen sich diese Lufttheilchen schneller bewegen, sie sollen einen Raum durchlaufen, welcher m = 2mal so groß ist als c, das heist, sie durchlaufen nun einen Raum von m . c = 2 . 8 = 16 Fuß. Wenn jedes Lufttheilchen mit noch einmal so grosser Geschwindigkeit anstößt, so giebt es auch einen noch einmal so kräftigen Stoß; folglich ist der Stoß, den der Flügel von jedem Lufttheilchen empfängt, m mal so stark, als da die Lufttheilchen den einfachen Raum durchliefen. In dem Raume m . c befinden sich auch m mal mehr Lufttheilchen, als in c, folglich stoßen wieder m mal so viel Lufttheilchen, als wie erst; es ist also der ganze Stoß, den die Ebene empfindet, $m . m = m^2$ = 4mal so stark, wie vorhin.

136, X.

Wenn man die ganze Ebene LHhl, auf welche der Stoß der Luft kommt, B nennt, so wird diese Ebene so viele Stöße empfangen, so viel Lufttheilchen in der Richtung GH auf sie treffen können. Wenn der Stoß eines Lufttheilchens c^2 ist, so ist der Stoß, den die ganze Ebene empfängt $B . c^2$. In einer Sekunde stoßen daher so viele Lufttheilchen an, so viele sich in einem Prisma befinden, dessen Grundfläche B und Höhe GH ist, das ist, dessen Höhe der Weg ist, den jedes Lufttheilchen in einer Sekunde zurück legt.

136, XI, XII, XIII.

Man nehme in fig. VI. der Erl. die Linie lH für den Durchschnitt der Ebene LHhl = B an; der Stoß der Luft geschehe nicht senkrecht, sondern unter einem Winkel GHR = ν. Die Luft lege in einer Sekunde den Weg GH = c zurück. Die Wirkung eines jeden Lufttheilchens auf die Ebene kann man sich aus zwei, nach verschiedenen

Richtungen wirkenden Kräften entstanden vorstellen. Die Richtung der ersten sey GR senkrecht auf die Ebene, und der zweiten GC mit der Ebene parallel. Diese letzte thut keine Wirkung auf die Ebene, sondern streicht vor ihr vorbei; die erste Kraft aber, übt ihre ganze Gewalt, die Ebene fort zu schieben, aus. Der Stoß, den itzt das Lufttheilchen auf die Ebene thut, verhält sich zum Stoße, wenn es mit seiner Geschwindigkeit die Ebene senkrecht träf, wie $\sin \eta : 1$; oder wenn die Geschwindigkeit eines Lufttheilchens durch GR und eines andern durch GH ausgedrückt ist, so verhalten sich die senkrechten Stöße zu einander, wie

$$GR : GH = \sin \eta : 1$$

136, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX.

Das Prisma, welches man sich hier vorstellen muß, kann man leicht verzeichnen, wenn man in fig. VI. der Erl. aus RH die Grundfläche B macht, und alle Seiten unter dem Winkel η darauf setzt.

Der senkrechte Stoß, den die Ebene empfindet, indem ein Lufttheilchen unter dem Winkel η auf sie stößt, und die Geschwindigkeit $HG = c$ hat, verhält sich zum Stoße, den die Ebene empfinden würde, wenn das Lufttheilchen mit der nemlichen Geschwindigkeit auf sie senkrecht stieß, wie

$$GR : GH = \sin \eta : 1$$
$$\overline{GR = GH \,.\, \sin \eta}$$
$$GH = c$$
$$\overline{A)\ GR = c \,.\, \sin \eta} \quad \text{oder}$$

der senkrechte Stoß nach der Zerlegung in die zwei Kräfte ist auf die Ebene von einem jeden Lufttheilchen, $c \,.\, \sin \eta$.

Weil B eine ganze Ebene ist, so stößt ein ganzes Prisma von Luft auf sie. Dieses Prismas Inhalt findet man nach Geom. 59. S., wenn man die Grundfläche mit

der Höhe multiplizirt. Wenn also GR die Höhe ist, so ist der Inhalt $= B \cdot GR$. Weil $GR = c \cdot \sin \eta$ (*A*), so ist der Inhalt des Prismas $= B \cdot c \cdot \sin \eta$.

Weil nun die Ebene so viele Stöße in einer Sekunde bekömmt, so viele Lufttheilchen in diesem Prisma enthalten sind, so ist der Stoß, den die Ebene empfindet

$$B \cdot c \cdot \sin \eta \cdot c \cdot \sin \eta = B \cdot c^2 \cdot \sin \eta^2$$

136, XX, XXI.

Es geschehen zwei verschiedene Stöße auf einerlei Ebene unter verschiedenen Winkeln und mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Der erste Stoß wirke unter dem Winkel η, der andere unter ζ auf die Ebene; des ersten Geschwindigkeit sey c, des andern C; so ist der erste Stoß $B \cdot c^2 \cdot \sin \eta^2$, der andere $B \cdot C^2 \cdot \sin \zeta^2$, folglich verhalten sich diese Stöße, wie

$$B \cdot c^2 \cdot \sin \eta^2 : B \cdot C^2 \cdot \sin \zeta^2 = c^2 \cdot \sin \eta^2 : C^2 \cdot \sin \zeta^2$$

das ist, wie die Produkte der Quadrate der Geschwindigkeiten in die Quadrate der Sinus ihrer Winkel, unter welchen sie geschehen.

136, XXIII, XXIV, XXV.

Wenn sich auf eine stillstehende Ebene eine Flüssigkeit unter einerlei Winkel η, aber einmal mit einer größern, das andere mal mit einer kleinern Geschwindigkeit bewegte, wo erst die Geschwindigkeit c das andere mal C wäre, so hätte man wieder beide Stöße $B \cdot c^2 \cdot \sin \eta^2$ und $B \cdot C^2 \cdot \sin \eta^2$, welche sich verhalten, wie

$$B \cdot c^2 \cdot \sin \eta^2 : B \cdot C^2 \cdot \sin \eta^2 = c^2 : C^2$$

das ist, wie ihre Geschwindigkeiten.

136, XXVI, XXVII, XXVIII.

Je dichter eine Materie ist, welche anstößt, desto stärker geschieht der Stoß. Wenn nun zweierlei Materien anstoßen, deren Dichtigkeiten sich verhalten, wie 1 : q, so verhalten sich die Stöße der beiden Massen zu einander, wenn die Geschwindigkeiten, Schiefe der Stöße, und Ebenen gleich sind, wie

$$B \,.\, c^2 \,.\, \sin \eta^2 \,.\, 1 : B \,.\, c^2 \,.\, \sin \eta^2 \,.\, q = 1 : q$$

also wie ihre Dichtigkeiten. Wenn die Geschwindigkeiten und die Winkel, unter welchen die Flüssigkeiten anstoßen, verschieden, die gestoßenen Ebenen aber gleich sind, so verhalten sich die Stöße, wenn die Geschwindigkeit der ersten Materie $= c$, der andern $= C$; der Anstoßwinkel der ersten $= \eta$, der andern ζ ist, wie

$$B \,.\, c^2 \,.\, \sin \eta^2 \,.\, 1 : B \,.\, C^2 \,.\, \sin \zeta^2 \,.\, q = c^2 \,.\, \sin \eta^2 \,.\, 1 : C^2 \,.\, \sin \zeta^2 \,.\, q.$$

Es lege ein Wind in einer Sekunde 14,568 Fuß, und ein Fluß in eben der Zeit 2 Fuß zurück, daß also die Geschwindigkeit des Windes $c = 14{,}568$, des Flusses $C = 2$ wäre; der Wind stoße unter dem Winkel $\eta = 30°$, der Fluß unter einem $\zeta = 10°$ an die Ebene; des Windes Dichtigkeit zu der des Wassers, sey wie 1 : 800, also $q = 800$; so ist nun der Stoß des Windes zum Stoße des Wassers, wie

$$c^2 \,.\, \sin \eta^2 \,.\, 1 : C^2 \,.\, \zeta^2 \,.\, q$$

$$14{,}568^2 \,.\, (\sin 30°)^2 : 2^2 \,.\, (\sin 10°)^2 \,.\, 800$$

$$(14{,}568 \,.\, \sin 30°)^2 : 4 \,.\, (\sin 10°)^2 \,.\, 800$$

$$(14{,}568 \,.\, \sin 30°)^2 : (\sin 10°)^2 \,.\, 3200$$

Die Rechnung durch Logarithmen geführt, für den Stoß des Windes

$\log \sin 30^\circ = 9{,}6989700$
10 (Trig. Vorer. 5. Vor. 19. S.)

$\log \sin 30^\circ = 0{,}6989700 - 1$
$\log 14{,}568 = 1{,}1633999$ (S. 123. d. Erl.)

$\log 14{,}568 + \log \sin 30^\circ = 0{,}8623699$
verdoppelt

$\log (14{,}568 \,.\, \sin 30^\circ)^2 = 1{,}7247398$

Dieß ist der Logarithme für den Stoß des Windes. Für den Stoß des Wassers ist

$\log \sin 10^\circ = 9{,}2396702$
10 abgezogen (Trig. Vorer. 5. V. 19. S.)

$\log \sin 10^\circ = 0{,}2396702 - 1$
verdoppelt
$\log (\sin 10^\circ)^2 = 0{,}4793404 - 2$
$\log 3200 = 3{,}5051500$

1,9844904

Der Logarithme des Stoßes des Wassers.

Es verhält sich also der Stoß des Windes zu dem des Wassers, wie 1 zu der vierten Proportionalzahl. Diese Propartionalzahl findet man, wenn man den Stoß des Wassers mit 1 multiplizirt, und mit dem Stoße des Windes hinein dividirt. Man kann diese Rechnung bequemer durch Logarithmen führen, wenn man, da der $\log 1 = 0$, bloß den Logarithmen des Windes von dem des Wassers abzieht. Also

log. des Stoßes des Wassers = 1,9844904
log. des Stoßes des Windes = 1,7247398

0,2597506

Dieser Logarithme unter der Kennziffer 4 aufgesucht, oder in Ermangelung der Tafeln, welche die Logarithmen

für größere Zahlen haben, den Logarithmen unter der Kennziffer 3 aufgeschlagen, und die fünfte Ziffer durch Proportionaltheile aufgesucht, findet man, daß er der Zahl 1,8186 zugehört. Es verhält sich also der Stoß des Wassers zu dem des Windes, wie 1,8186 : 1.

137, II.

Man mache die Linie GH von Drath mit der Axe parallel, welche daher in der Ebene ACH liegt, und eben den Winkel mit dem Flügel macht, in welchem AC auf demselben steht. Dieser Winkel sey also $= ACE = \gamma$. Verfertigt man sich in dem Modelle die Linie JH auch aus Drath, senkrecht auf den Flügel, so ist der Winkel $GHJ = 90^\circ - \gamma$ (p. f.), wie fig. V, * der Erl., in welcher alles übrige weggelassen und blos die Ebene JGH vorgestellt ist, zeigt. Hier ist JH senkrecht auf den Flügel, und JG mit ihm parallel. Und macht man ferner GJ auf HJ senkrecht, so ist in dem rechtwinklichen Dreiecke GJH, da der Winkel $GHJ = 90^\circ - \gamma$ ist, der Winkel JGH die Ergänzung zu 90° für den Winkel GHJ, das ist, $JGH = \gamma$, folglich

$$\cos \gamma = \sin GHJ$$

Nun ist $1 : \cos \gamma = HG : GJ$

$$GJ = HG \, . \cos \gamma$$

und $1 : \sin \gamma = HG : HJ$

$$A) \quad HJ = HG \, . \sin \gamma.$$

137, III.

Man nehme des Flügels Grundfläche $= e^2$ an; und der Wind lege in einer Sekunde den Weg $GH = c$ zurück, das heißt, es sey die Geschwindigkeit des Windes $= c$; die Richtung des Stoßes geschehe nicht perpendikulär

auf die Ebene des Flügels, sondern unter dem Winkel γ. Es stößt also auf den Flügel ein Prisma von Luft, dessen Grundfläche der Flügel selbst, und dessen jede Seite die Geschwindigkeit des Windes $= c$, auch mit der Richtung des Windes parallel ist, folglich den Winkel γ mit der Grundfläche macht. Will man wissen, wie groß das Prisma ist, oder wie viel Lufttheilchen in einer Sekunde anstoßen, so muß man die Grundfläche mit der Höhe multipliziren. Wenn die Geschwindigkeit des Windes $= GH = c$ ist, so kann JH die Höhe des Prismas seyn, nemlich ein Perpendikel auf die Grundfläche des Prismas. Dieses

$$HJ = HG \,.\, \sin\gamma \quad (A)$$
$$HG = c$$
$$\overline{HJ = c \,.\, \sin\gamma}$$

Folglich der Inhalt des Prismas $= e^2 \,.\, c \,.\, \sin\gamma$.

137, IV.

Man kann alle Luft, welche auf den Flügel stößt, ansehen, als sey sie in der Linie GH vereinigt. Den Stoß eines jeden Lufttheilchens kann man sich in zwei Theile zerlegt vorstellen, davon einer senkrecht auf den Flügel, der andere mit ihm parallel wirkt. Wenn man daher wieder GH als die Richtung des Stoßes der Luft ansieht, so sey der erste dem JH gleich und parallel, wofür man JH selbst setzen kann. Der zweite sey GJ. Es ist daher in dem Dreiecke GHJ

$$GH : HJ = c : \text{senkrechten Stoße}$$

$$\text{senkr. Stoß} = \frac{c \,.\, HJ}{GH}$$

oder $1 : \sin\gamma = c : \text{senkr. Stoß}$

$$\overline{\text{senkr. Stoß} = c \,.\, \sin\gamma}$$

daher $D) \frac{c . HJ}{HG} = c . \sin\gamma$

Da die Wirkung des Stoßes GJ mit dem Flügel parallel geht, so geht dieser vorbei, und wirkt gar nicht auf den Flügel. Der senkrechte Stoß aber trift den Flügel ganz.

137, V.

Will man wissen, wie groß der senkrechte Stoß aller Lufttheilchen auf den Flügel ist, so muß man den Stoß eines Theilchens mit dem ganzen Luftprisma, welches auf den Flügel wirkt, multipliziren. Der Juhalt des Prismas ist

$$e^2 . c . \sin\gamma \ (137\ \text{III}, B)$$

der senkrechte Stoß eines Lufttheilchens

$$c . \sin\gamma \ (137, \text{IV}, D)$$

daher der senkrechte Stoß aller Lufttheilchen, welcher durch HJ ausgedrückt wird

$$C)\ HJ = e^2 . c . \sin\gamma . c . \sin\gamma = e^2 . c^2 . \sin\gamma^2$$
$$= (e . c . \sin\gamma)^2$$

137, VI, VII, VIII.

Soll H den Umfang der Grundfläche eines senkrechten Kegels beschreiben, so darf der Winkel HCA kein rechter Winkel seyn.

Wenn nun eine Kraft auf die Ebene AGHC senkrecht wirkt, so dreht sich der Flügel um seine Axe. Man zerlege also die Kraft JH in eine, welche in der Ebene AGHC liegt, und in eine, welche senkrecht auf diese Ebene ist; die erste wird LH, die andere JL seyn. Man mache JL im Modelle von Drath senkrecht auf GH, wie JL in der fig. V, * der Erl. es zeigt, so ist LH ein Stück von GH. LH sollte in der Ebene AGHC liegen, sie ist aber in der

Figur des Autors mit ihr parallel gezogen worden, und meiner in dieser Ebene selbst gleich.

137, IX, X.

Die Kraft LH, welche in der Ebene AGHC liegt, wird völlig aufgehalten, und die JL, oder eine parallel mit ihr in H angebracht, dreht den Flügel nach ihrer Richtung, so daß alle Punkte des Flügels Kreise beschreiben, deren gemeinschaftlicher Pol in C liegt.

137, XI.

Weil die Linie HJ auf den Flügel senkrecht ist, und in der Ebene HJL liegt, so ist die ganze Ebene HJL auf den Flügel senkrecht, und weil JL in der Ebene HJL auf die Ebene ACHG senkrecht ist, so steht die Ebene HJL auch auf die Ebene ACHG senkrecht, daher auch CH auf die Ebene HJL perpendikulär. Folglich ist der Durchschnitt der Ebene HJL mit dem Flügel auf CH senkrecht. Mit dem Durchschnitte der Ebene HJLG oder HJL und des Flügels, macht GH oder HL den Neigungswinkel der Ebene ACH gegen den Flügel $= \gamma$. Folglich ist

$$JHG = 90^\circ - \gamma = JHL$$

$$1)\ \sin JHL = \cos \gamma.$$

137, XII.

In dem Dreiecke HJL ist

$$JH : JL = 1 : \sin IHL$$

$$\sin JHL = \cos \gamma \quad (137, XI, 1)$$

$$JH : JL = 1 : \cos \gamma$$

$$JL = JH \,.\, \cos \gamma$$

$$JH = e^2 \,.\, c^2 \,.\, \sin \gamma^2 \quad (137, V, C)$$

$$JL = e^2 \,.\, c^2 \,.\, \sin \gamma^2 \,.\, \cos \gamma.$$

137, XIII.

Wenn für einen Flügel die Fläche desselben $= g^2$, den Winkel, den der Flügel mit der Axe macht $= \eta$, und die Geschwindigkeit des Windes $= h$ gegeben ist; und für einen andern Stoß die Fläche des Flügels $= e^2$, der Winkel, den der Flügel mit der Axe macht $= \gamma$, die Geschwindigkeit des Windes $= c$ ist, so verhalten sich beide Stöße zu einander, wie

$$F)\; g^2 . h^2 . \sin\eta . \cos\eta : e^2 . c^2 . \sin\gamma^2 . \cos\gamma.$$

138.

Sind die Flächen, auf die gestoßen wird, ingleichen die Geschwindigkeiten des Windes gleich, so verhalten sich die Stöße (137, XIII, *F*) wie

$$g^2 . h^2 \sin\eta^2 . \cos\eta : e^2 . c^2 . \sin\gamma^2 . \cos\gamma$$

$$g = e \,;\, h = c$$

$$\sin\eta^2 . \cos\eta : \sin\gamma^2 . \cos\gamma$$

$$\cos\eta . \sin\eta^2 : \cos\gamma . \sin\gamma^2.$$

140.

Nach Trig. 3. Erkl. 1. Z. ist $\sin\gamma^2 = 1 - \cos\gamma^2$, also

$$\cos\gamma . \sin\gamma^2 = \cos\gamma . (1 - \cos\gamma^2)$$

Es sey $\cos\gamma = u$, so ist

$$\cos\gamma . (1 - \cos\gamma^2) = u . (1 - u^2)$$

$$\cos\gamma . (1 - \cos\gamma^2) = u - u^3$$

Soll der Flügel den größten Effekt thun, so muß man einen Winkel suchen, dessen Sinus im Quadrat mit seinem Cosinus multiplizirt, das möglichst größte Produkt giebt; alsdann wird die Ebene des Flügels und das Quadrat der Geschwindigkeit noch in dieses Produkt multiplizirt,

so kommt der größte Werth für die Kraft, welche den Flügel dreht, heraus. Dieses größte Produkt des $\cos\gamma . \sin\gamma^2$ zu finden, lehrt die Algebra und zwar die Differentialrechnung. Von $u - u^3$ ist die Größe differentiirt.

$du - 3u^2 du$. Nun sey

$$du - 3u^2 du = 0$$
du div.

$$1 - 3u^2 = 0$$

$$1 = 3u^2$$

$$\tfrac{1}{3} = u^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}} = u = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Den Zähler und Nenner mit $\sqrt{3}$ multiplizirt, so bleibt der Werth des Bruchs unverändert, also

$$u = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1,7320508}{3}$$

$u = 0,5773503 = \sin 35^\circ\ 15' +$ noch einigen Sekunden.

Der Sinus $35^\circ\ 15' +$ ist dem $\cos 54^\circ 44' -$ einigen Sekunden gleich. Also ist $u = \cos\gamma = \cos 54^\circ\ 44'$ und folglich $\gamma = 35^\circ\ 15'$ Wenn hiervon das Quadrat gemacht und mit dem Cosinus multiplizirt wird, so giebt dieses das möglichst größte Produkt aller Quadrate der Sinus mit ihrem Cosinus.

Vom Reiben.

149, VIII.

Soll ein Körper auf einer schiefen Ebene nicht fallen, wenn er keine Friktion hat, so muß man, je nachdem die

Ebene einen großen oder kleinen Winkel mit dem Horizonte macht, eine große oder kleine Kraft anwenden, ihn zurück zu halten. Leidet aber der Körper Friktion auf der schiefen Ebene, so muß, wenn der Körper nicht fallen soll, die Friktion der Kraft gleich seyn, welche angewendet werden mußte, da man sich den Körper ohne alle Friktion dachte; das heist, seine respektive Kraft muß der Friktion gleich seyn. (Man nehme die Figur 17. vor sich, und statt der Kugel blos das Parallelepipedum CJLN, wenn die Linie CN mit CJ parallel gezogen wird). Diese Friktion entsteht aus dem Drucke, welchen die Last auf die schiefe Ebene macht. Denn ein Körper hat auf eine Horizontalebene desto mehr Friktion, je schwerer er ist, oder je mehr er seiner Schwere wegen auf die Ebene drückt; daher muß auch ein Körper auf einer schiefen Ebene desto weniger Friktion leiden, je weniger er auf diese Ebene drückt. Nun sei der Druck der Last auf die schiefe Ebene $= S$, so ist

$$S : Q = \cos D : 1 \quad (98, B)$$

$$S = Q \cdot \cos D.$$

Von diesem Drucke S auf die schiefe Ebene, sey die Friktion $\frac{1}{m}$, folglich die Friktion des Körpers

$$\frac{1}{m} S = \frac{1}{m} \cdot Q \cdot \cos D.$$

Weil aber die Friktion gleich ist der Kraft, welche man anwenden muß, wenn der Körper ohne Friktion auf der schiefen Ebene betrachtet wird, wie in 98, so muß, wenn diese Kraft F heist,

$$F = \frac{1}{m} S = \frac{1}{m} \cdot Q \cdot \cos D \text{ seyn.}$$

Da nun $F : Q = \sin D : 1$ (98, *A*) ist, und daher $F = Q \cdot \sin D$, so muß auch

$$F = \frac{1}{m} S = \frac{1}{m} . Q . \cos D = Q . \sin D \text{ seyn}$$

$$\frac{1}{m} \cos D = \sin D$$

$$\frac{\cos D}{m} = \sin D$$

$$\cos D = m . \sin D$$

$$\frac{\cos D}{\sin D} = m$$

$$\frac{\cos D}{\sin D} = \cot D \text{ (Trig. 5. Erkl. 1. 3.)}$$

$$\cot D = m.$$

149, IX.

Nimmt man für $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$, also $m = 3$, so ist beinahe $m = 3 = \tang 71^\circ 34' = 3{,}0002820 = \cot 18^\circ 26'$. Es kommt 3 der $\cot 18^\circ 26'$ näher, als $\cot 18^\circ 25'$, weßwegen man lieber $3 = \cot 18^\circ 26'$ annehmen könnte. Folglich gleitet ein Körper ab, sobald der Winkel D grösser als $18^\circ 26'$ wird, wenn die Friktion $\frac{1}{3}$ des Druckes beträgt.

149, XV.

Man hat den halben Wagebalken $= a$, und den Halbmesser des Zapfens $= e$, ingleichen die Last, welche angebracht wird. Es muß also

$e : a = x : \frac{1}{3}(2P + W + x)$ seyn

$\frac{1}{3}(2P + W + x) \cdot e = a \cdot x$

$$\frac{(2P + W + x) \cdot e}{3} = a \cdot x$$

$(2P + W + x) \cdot e = 3a \cdot x$

$2P \cdot e + W \cdot e + x \cdot e = 3a \cdot x$

$2P \cdot e + W \cdot e = 3a \cdot x - x \cdot e$

$2P \cdot e + W \cdot e = (3a - e)\, x$

$$\frac{2P \cdot e + W \cdot e}{3a - e} = x$$

Die Hydrostatik.

25.

Auf diesen Satz gründet sich Wolfs anatomischer Heber, welchen er in seinen Elem. Hydrost. §. 52 beschreibt. Er besteht aus einer sehr langen, 6 bis 7 Fuß ½ Zoll im Durchmesser haltenden Röhre, und auf der andern Seite aus einer ungefähr 6 Zoll hohen und 8 bis 10 Zoll im Durchmesser haltenden Röhre, welche mit der ersten dünnen eben so verbunden ist, wie hier in fig. 4 die Röhre DMTLKFE. Spannet man nun über den kurzen aber weiten Theil des Hebers eine Haut oder Blase, und befestigt sie durch einen Faden an dem am Heber befindlichen Rande, gießt alsdann Wasser durch die lange Röhre, so treibt das Wasser die Blase in die Höhe, so daß man, wenn der Heber voll ist, ein Gewicht auf diese Blase legen kann, das einer Wassersäule gleich ist, deren Grundfläche die Oeffnung des kurzen Schenkels, und die Höhe die Höhe des langen engen Schenkels ist, von dem Orte an gerechnet, wo die Blase angebunden ist. Es werden daher alle Theile der Membran sehr auseinander gedehnt, so, daß man ihr Gewebe ganz sehen, auch sie mit Injektionsmaterie bequem ausspritzen kann.

26.

Wenn das Wasser um Dd in der engen Röhre fällt, so steigt es in der weiten um Kk. Um wieviel das Wasser also in der engen Röhre sich vermindert hat, um so viel muß es sich in der weiten der Menge nach vermehrt haben; daher müssen die Wasserzylinder gleich seyn, folglich

$$(1)\ DEed = KLlk$$

Der Inhalt eines Zylinders kommt heraus, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multiplizirt (Geom. 59. S. 4. Z.) *). Ist nun ed = der Grundfläche und Dd = der Höhe, so ist

$$2)\ DEed = ed \,.\, Dd$$

und KL = kl für die Grundfläche des andern Zylinders angenommen, ist Kk die Höhe, daher auch

$$KLlk = KL \,.\, Kk$$

$$KLlk = DEed\ (1) = ed \,.\, Dd\ (2)$$

$$ed \,.\, Dd = KL \,.\, Kk$$

$$Dd : Kk = KL : de \quad (\text{Ar. V, } 33.)$$

Es verhält sich also die Höhe des gefallenen Wassers in dem einen Zylinder zur Höhe des gestiegenen Wassers im andern, umgekehrt wie die Grundflächen der beiden Zylinder.

Von dem Drucke auf die Seiten des Gefässes.

27.

Will man untersuchen, wie stark das Wasser auf den Boden eines Gefässes drückt, wenn das Gefäß nicht senkrecht, sondern gegen den Horizont schief steht, wie in fig. 5. ABCD, so untersuche man zuerst, wie schwer der ganze Zylinder ABCD ist. Man nenne die Grundfläche des Gefässes m, so ist die Höhe desselben AC, welche senkrecht auf die Grundfläche ist. Der Inhalt des Zylinders ist also = AC . m (Geom. 59. S. 4. Z.). Nun verhält sich ein

*) In den Ausgaben der reinen Mathematik von den Jahren 1786 und 1792, ist dieser Satz der 59ste, und daher der im Buche angeführte Satz nicht der 60ste S. 4. Z., sondern der 59ste S. 4. Z.

Kubikfuß Wasser zu AC . m Kubikfussen, wie die Schwere eines Kubikfusses Wasser zu der Schwere des ganzen Zylinders, welcher AC . m Kubikfusse enthält. Also ist, wenn man die Schwere eines Kubikfusses Wasser 70 Pfund annimmt,

$$1 : AC . m = 70 \text{ Pf.} : AC . m . 70 \text{ Pf.}$$

welches die Schwere des ganzen Zylinders ausdrückt. Stände dieser Zylinder senkrecht, so drückte die ganze Schwere des Wassers auf den Boden, so aber liegt die Schwere dieses Zylinders auf einer schiefen Ebene. Man stelle sich von A ein Perpendikel AQ auf den Horizont gezogen vor, welches dem DE gleich, und mit ihm parallel ist: ferner von C die Linie CQ mit BE parallel auf das Perpendikel AQ senkrecht; so stellt AQC die schiefe Ebene vor, auf welcher ABCD liegt. Man stelle sich hier, so wie in Mech. 98 vor, der Körper fange an, von der schiefen Ebene herab zu gleiten, man suche die Kraft, mit welcher er zurück gehalten werden muß, damit er nicht falle. Es drückt dieser Zylinder mit einer Kraft senkrecht auf die Ebene, diese wird von der Ebene getragen, und mit einer andern, parallel mit der Ebene, diese verhält sich zur ganzen Last, wie sich AC : AQ verhält; oder, da diese Last es ist, welche auf den Boden drückt, so ist

$$AC : AQ = AC . m . 70 : \frac{AC . m . 70 . AQ}{AC}$$

welche vierte Proportionalzahl den Druck auf den Boden des Gefässes ausdrückt.

$$\frac{AC . m . 70 . AQ}{AC} = \frac{AC}{AC} . AQ . m . 70$$

$$= AQ . m . 70$$

$$AQ = DE$$

$$= DE . m . 70.$$

läßt man das Gewicht des Kubikfusses Wasser weg, so bleibt der Druck auf den Boden = DE . m, welchen man für jede Flüssigkeit brauchen kann, wenn man dieses Produkt noch mit dem Gewichte eines Maaßes, worin der Inhalt des ganzen Zylinders angegeben ist, multiplizirt; versteht sich mit dem Gewichte eines Maaßes von der Flüssigkeit, womit das Gefäß angefüllt ist. Der Druck einer Flüssigkeit auf den Boden eines Gefässes ist also so groß, als das Gewicht einer Säule der Flüssigkeit, deren Grundfläche die Grundfläche des Gefässes, und die Höhe, die senkrechte Höhe von der Grundfläche bis zur Oberfläche der Flüssigkeit ist.

28.

Der Druck, den jedes Wassertheilchen gegen ein Element der Seite ausübt, ist entweder so gegen die Seite des Gefässes gerichtet, daß, wenn man eine Röhre auf dieses Element setzte, diese Röhre aufwärts gerichtet wäre, wie GC, oder mit dem Horizonte parallel und dann aufwärts gekrümmt, oder drittens unter die horizontale Lage gerichtet, wie HSO.

Nun drückt in dem ersten Falle das Wasser auf das Element der Fläche. Soll ein Gleichgewicht erfolgen, so muß das Wasser in der Röhre CG einen gleichen Druck auf G ausüben. Weil nun dieser Wasserzylinder gegen den Horizont geneigt ist, so ist das der Fall, wie in 27, nemlich der Druck auf den Boden ist ein Produkt aus dem Boden und der senkrechten Tiefe des Bodens unter der Wasserfläche CDE. Diesem Drucke ist der Druck, den das Wasser auf dieses Seitenelement ausübt, gleich.

II. Fall. Setzt man bei L eine Röhre horizontal an, krümmt sie bei V senkrecht aufwärts nach N, so drückt das Wasser wieder im Gefässe an L. Soll wieder ein Gleich-

gewicht entstehn, so muß das Wasser in der Röhre NVS eben so stark widerdrücken. Nun drückt aber das Wasser in dem horizontalen Stück Röhre nicht mit, sondern es pflanzt nur den Druck fort, also drückt nur das Wasser im senkrechten Theile der Röhre NV. Bei V ist die Röhre noch eben so weit, als bei L, also ist der Druck des Wassers in NV ein Produkt aus der Grundfläche des Zylinders bei V oder L in die Höhe NV, oder des Elements L unter der Oberfläche des Wassers NE, welcher Druck dem Drucke des Wassers im Gefässe auf das Element gleich ist.

III. Fall. Ist die Röhre so gekrümmt, daß OP in der Ebene der Oberfläche des Wassers im Gefässe liegt, und H wieder nur ein Element von der Seite ist, so drückt, eben so wie im ersten und zweiten Falle, das Wasser gegen H im Gefässe; das Wasser aber in der Röhre OSH, drückt eben so stark entgegen. Wenn man durch H bis S eine Parallele mit der Oberfläche des Wassers zieht, so drückt das Wasser in SH nicht mit, sondern es pflanzt nur den Druck von OS bis in H fort. Also ist der Druck, den OS ausübt, wieder gleich einem Produkte aus der Grundfläche des Zylinders bei S, die dem Elemente H gleich ist, in die Höhe OS oder die Tiefe des H unter der Oberfläche des Wassers im Gefässe. So stark drückt daher das Wasser im Gefässe auf das Element der Seite H.

29.

Man kann, wie im vorigen §. gelehrt worden, den Druck des Wassers auf ein kleines Theilchen der Seitenfläche berechnen, und dieser ist allemal die Schwere eines Zylinders von Wasser, welcher zu seiner Grundfläche das Theilchen der Seite, und zu seiner Höhe die Tiefe dieses Theilchens unter dem Wasserstande hat.

Vom Gleichgewichte flüssiger Materien von verschiedener Art.

30.

Hat man zwei Materien von verschiedenen spezifischen Schweren, deren Verhältniß G : g ist, und nimmt von jeder Masse ein gleichgroßes Stück, so müssen sich die Gewichte verhalten, wie diese eigenthümlichen Schweren. Sind beide so groß als v, oder füllet jedes Stück der Masse den Raum v aus, und des ersten Gewicht = x, seine eigene Schwere = G; des zweiten Gewicht = p, seine eigene Schwere = g, so ist

$$1)\ x : p = G : g$$

Sind die Massen einerlei, die eignen Schweren daher gleich, und man nimmt davon zwei verschiedene Stükken, deren erstes den Raum = V, des zweiten den Raum = v ausfüllet; des ersten Gewicht = P, und des zweiten Gewicht = x ist, so verhalten sich bei diesen von einander nicht unterschiedenen Massen die Gewichte, wie die verschiedenen Stücken oder Räume, welche sie einnehmen. Also

$$2)\ P : x = V : v$$

Die beiden Propositionen 1 und 2 setze man unter einander, und multiplizire die Glieder in einander, nach Ar. V, 50.

$$x : p = G : g \quad (1)$$
$$P : x = V : v \quad (2)$$
$$P . x : p . x = G . V : g . v$$
$$3)\ P : p = G . V : gv$$

Das heist, die Gewichte verschiedener Stücken von verschiedenen Massen, und verschiedener Größe, verhalten sich

wie die Produkte der eignen Schweren in ihre Räume multiplizirt.

31, I.

Betrachtet man blos schwere Materien, so haben sie desto mehr eigenthümliche Schwere, je dichter sie sind, je mehr ihre einzelnen Theilchen an einander gepreßt sind.

31, II.

In 30, 3) hat man

$$P : p = G . V : g . v$$

$$P . g . v = p . G . V$$

$$\frac{P . g . v}{G} = p . V$$

$$\frac{P . v}{G} = \frac{p . V}{g}$$

Daraus läßt sich folgende Proportion herleiten:

$$\frac{P}{G} : \frac{p}{g} = V : v$$

Es verhalten sich also die Räume, wie die Quotienten der Gewichte, durch ihre eignen Schweren dividirt.

31, III.

Aus 30, 3) ist wieder

$$P : p = G . V : g . v$$

$$P . g . v = p . G . V$$

$$\frac{P . g . v}{V} = p . G$$

$$\frac{P . g}{V} = \frac{p . G}{v}$$

Daraus läßt sich wieder folgende Proportion herleiten:

$$4)\ \frac{P}{V} : \frac{p}{v} = G : g.$$

welches anzeigt, daß sich die eignen Schweren verhalten, wie die Quotienten der Gewichte der Massen durch ihre Räume, die sie einnehmen, dividirt.

31, VI.

Nimmt man bei allen Körpern, welche man mit einander vergleichen will, einerlei Maas an, z. B. pariser, oder ein anderes, so bekommt man für V und v Mengen von Kubikfussen in dem Maaße, welches für sie alle gebraucht wird. Nimmt man ferner für ihre Gewichte einerlei Pfunde oder so etwas an, so bedeuten auch P und p Mengen von Pfunden des Gewichts, welches bei den Körpern gemeinschaftlich angewendet wird. Des Wassers eigne Schwere setze man zum Grunde, und nenne sie beständig 1, daß sich also des Wassers eigne Schwere zu der eines Körpers beständig verhält, wie 1 : x, wo x die spezifische Schwere des Körpers, in Zahlen ausgedrückt, anzeigt.

Will man z. B. das Verhältniß der eignen Schwere des Bleies zur eignen Schwere des Wassers finden, so ist aus 31, III, 4)

$$\frac{P}{V} : \frac{p}{v} = G : g$$

Es sey V = 4 die Menge der Kubikfusse Wasser; P = 280 Pfund für das Gewicht von 4 Kubikfuß Wasser; v = 2 für die Kubikfusse Blei; p = 1588,3 Pfund das Gewicht von 2 Kubikfuß Blei; des Wassers eigne Schwere sey G = 1; und die des Bleies sey = g. Man hat also für

$$\frac{P}{V} : \frac{p}{v} = G : g$$

$$\frac{280}{4} : \frac{1588,3}{2} = 1 : g$$

$$70 : 794,15 = 1 : g$$

$$g = \frac{794,15}{70}$$

$$g = \frac{79,415}{7}$$

$$g = 11,345$$

Das Verhältniß der eignen Schwere des Wassers zu der des Bleies ist daher wie

$$1 : 11,345.$$

31, VII.

Ein Kubikfuß Blei wiege so viel als G Kubikfuß Wasser, man fragt, wie viel V Kubikfuß Blei wiegen? Es ist also

$$1 \text{ Kubikf.} : V \text{ Kubikf.} = G \text{ Kubikf. W.} : P$$

$$P = G \cdot V \cdot \text{Kubikf. W.}$$

Es sey G die Zahl, welche das Verhältniß der spezifischen Schwere des Bleies gegen die des Wassers = 1 ausdrückt, daher G = 11,345; V = 2 Kubikfuß. (Man darf sich nicht irre machen lassen, daß in 31, III. diese hier gebrauchten Zahlen für die kleinen Buchstaben g und v gebraucht worden sind; dort galten die großen Buchstaben für die Größen des Wassers, hier aber gelten sie für die Grössen des Bleies). Also ist

$$P = 11,345 \cdot 2, \text{ Kubik. W.}$$

Den Kubikfuß Wasser zu 70 Pfund gerechnet, kommt

$$P = 11,345 \cdot 2 \cdot 70 \text{ Pf.}$$

$$P = 22,69 \cdot 70 \text{ Pf.}$$

$$P = 1588,3 \text{ Pf.}$$

Man darf also nur, wenn man eines Körpers Gewicht wissen will, und den Kubikinhalt in Fussen, nebst der eignen Schwere gegen die des Wassers weiß, den Kubikinhalt mit der eignen Schwere und mit dem Gewichte eines Kubikfusses Wasser multipliziren, so bekommt man das Gewicht dieser Masse. Ist das Stück der Masse nicht in Kubikfussen just gegeben, sondern in Zollen, oder in sonst einem Kubikmaaße, so muß man nothwendig auch das Produkt der eignen Schwere und des Kubikinhalts mit der Schwere eines Kubikzolles u. s. w. Wasser multipliziren, die eigne Schwere dieser Masse zu erfahren.

Aus $P = G \cdot V$ bekommt man

$$Z) \quad \frac{P}{G} = V$$

Den Kubikinhalt also der Masse findet man, wenn man das Gewicht des Körpers durch ein Produkt aus der eignen Schwere in das Gewicht eines Kubikfusses Wasser dividirt.

Für Blei den Kubikinhalt zu finden, sey $P = 1588,3$ Pf.; $G = 11,345$, so ist

$$V = \frac{P}{G \cdot 1 \text{ Kubikf. Wasser.}}$$

$$V = \frac{1588,3}{11,345 \cdot 70}$$

$$V = \frac{1588,3}{794,15}$$

$$V = \frac{158830}{79415}$$

$$V = 2 \text{ Kubikfuß.}$$

Aus $P = G \,.\, V$ findet man ferner

$$\frac{P}{V} = G$$

Dieses G ist also die eigne Schwere, wenn sein Werth noch mit dem Gewichte eines Kubikfusses Wasser dividirt wird. Die eigne Schwere also zu bekommen, muß man das Gewicht eines Körpers durch ein Produkt aus dem Raume in das Gewicht eines Kubikfusses Wasser dividiren. Also ist

$$G = \frac{P}{V}$$

$$G = \frac{1588,3}{2 \cdot 70}$$

$$G = \frac{1588,3}{140}$$

$$G = 11,345.$$

Für die eigne Schwere des Bleies.

31, Anmerk.

Wenn die Buchstaben das bedeuten, wie im Buche angegeben ist, und für Engelland die großen Buchstaben, für Schweden aber die kleinen gelten, so hat man aus 31, III, 4.)

$$\frac{P}{V} : \frac{p}{v} = G : g$$

$$g \cdot \frac{P}{V} = G \cdot \frac{p}{v}$$

$$g \cdot \frac{P}{V} \cdot v = G \cdot p$$

$$g \cdot P \cdot v = G \cdot p \cdot V$$ daher

$$P \cdot v : p \cdot V = G : g$$

Es sey $P = 7$; $v = 9$; $p = 3$; $V = 1$, so ist

$$7 \cdot 9 : 3 \cdot 1 = G : g$$

$$63 : 3 = G : g$$

$$21 : 1 = G : g$$

Es verhalten sich also die Bevölkerungen von Engelland und Schweden zu einander, wie 21 : 1.

34.

Wenn man eine hohle ....

Nimmt man ein gewöhnliches Arzneiglas, füllt dieses etwa mit Bier voll, hält den Finger vor die Oeffnung, kehrt das Glas unterm Wasser um, und thut den Finger weg, so sieht man, wie das Bier allmählig aus dem Glase in das Wasser herab steigt, und im Gegentheil das Wasser die Stelle des Bieres einnimmt, so, daß am Ende sich helles Wasser statt des Bieres im Glase befindet. Dieses giebt auch zugleich eine artige Belustigung und Kunststück in Gesellschaft.

35, I.

Beim Füllen der beiden Schenkel der Röhre, fülle man die Materien so ein, daß die schwerere Materie den ganz untern Raum JCLB einnimmt.

35, II, III, IV, V.

Es sey l^2 der Durchschnitt der Röhre AL, so wird der Durchschnitt bei L von einem Zylinder oder Prisma, nachdem die Röhre rund oder eckig ist, gedrückt, dessen Grundfläche der Durchschnitt l^2, und die Höhe GL ist; folglich ist das ganze Prisma $= l^2 . GL$, die Schwere dieses Prismatis ist aber der Inhalt mit der eignen Schwere der Materie multiplizirt, und daher $= l^2 . GL . k$. Soll die Ruhe erfolgen, indem die Materie von schwererer Art in dem andern Schenkel DJ ist, und welche den untern Raum BC mit einnimmt, übrigens nicht so hoch in ihrer Röhre steht, als die andere leichtere Materie in der ihrigen, so muß ein Widerstand bei L geleistet werden, welcher dem Drucke, den die Materie in der Röhre AL thut, gleich ist. Dieser Widerstand aber ist der Druck eines Prismatis von der schwerern Materie, dessen Grundfläche die Grundfläche der Röhre $AG = l^2$, und dessen Höhe die Höhe des Prismatis der schwerern Materie, von C an gerechnet ist. Dieses Prisma ist daher $= l^2 . CS$, und seine Schwere $= l^2 . CS . m$. Weil nun Ruhe erfolgen soll, so müssen diese beiden Drucke gleich seyn, folglich

$$l^2 . LG . k = l^2 . CS . m$$

$$LG . k = CS . m$$

Hieraus kann man folgende Proportion machen

$$LG : CS = m : k.$$

36.

Man nehme einen dritten Schenkel EF an, und fülle ihn mit einer Materie, deren Dichte $= r$ ist, welche aber ebenfalls kleiner als m seyn soll. Die schwerere Materie stehe in dem Schenkel EF bis H, so muß man H als den Horizont betrachten, von welchem man die Höhen der

Flüssigkeiten annehmen muß. In der Figur muß man den Stand der schweren Materie, den die punktirte Linie in dem großen Schenkel bezeichnet, also S, noch über H annehmen. Es müssen sich nun die Höhen der beiden Flüssigkeiten, von ihrem gemeinschaftlichen Horizonte H an gerechnet, verhalten umgekehrt wie ihre eignen Schweren. Daher

$$HF : HS = r : m$$

Wollte man die Dichten der beiden Flüssigkeiten in den Schenkeln HL und EF vergleichen, so dürfte man nicht etwa schliessen, sie wären in dem Verhältnisse r : k = LG : HF. Denn in dem Schenkel EF befinden sich zweierlei Materien, eine, deren Dichte m ist, und die den Raum EH einnimmt, und die andere, deren Dichte r ist, und die den Raum HF ausfüllt. Mit diesen beiden Flüssigkeiten hält die, deren Dichte k ist, in dem Schenkel LA das Gleichgewicht. Also würde dieses ein durch einander gemengtes Verhältniß seyn. Das wahre Verhältniß läßt sich aus dem bisher gelehrten nicht finden.

Vom Gleichgewichte flüssiger Körper mit festen, die sich in ihnen befinden.

38.

Wenn V mit dem flüssigen Wesen selbst ausgefüllt ist, so erhält sich diese Flüssigkeit, die den Raum V ausfüllt, in ihrer Stelle. Dieses Stück von der Flüssigkeit kann mit weiter nichts dem Drucke des um und neben ihm auf ihn drückenden flüssigen Wesens widerstehen, als mit seinem Gewichte, folglich muß das Gewicht dem Drucke der um ihn liegenden Flüssigkeit gleich seyn.

Ist nun der Raum V mit einem fremden Körper ausgefüllt, so ist doch der Druck auf ihn immer der nemliche. Soll der Körper sich in seiner Stelle erhalten, so muß sein Gewicht dem Drucke, welchen die Flüssigkeit auf ihn ausübt, gleich seyn; das ist, er muß eben so schwer seyn, als ein gleiches Stück der Flüssigkeit, in welcher er sich befindet. Ist sein Gewicht dem Drucke nicht gleich, ist es kleiner, oder ist ein gleiches Stück von der Flüssigkeit schwerer, als das Gewicht des Körpers, so steigt der Körper in der Flüssigkeit an die Oberfläche derselben. Wäre aber dieses Körpers Gewicht größer, als der Druck der Flüssigkeit auf ihn, oder wäre das Gewicht eines gleich großen Stücks der Flüssigkeit kleiner, als das des Körpers, so sinkt der Körper in der Flüssigkeit zu Boden.

39.

Es sei der feste Körper Blei, welcher sich im Wasser einsenkt, das Gleichgewicht eines Kubikfußes Blei sei $= p = 794,15$ Pf. Das Gewicht eines Kubikfusses Wasser $= m = 70$ Pf. Nun ist der Druck, den das Wasser dem Bleie entgegen setzt, dem Gewichte eines gleich großen Stücks Wasser gleich: wäre das Blei nicht schwerer als das Wasser, so könnte es nicht sinken; da es aber schwerer ist, so sinkt es, aber nicht mit seinem ganzen Gewichte, welches es in freier Luft hat, sondern nur, weil ihm das Wasser mit dem Gewichte eines gleich großen Stück Wassers widersteht, mit dem Ueberschusse des Gewichts des Bleies über das Gewicht eines gleich großen Stücks Wasser. Setzt man, daß ein Kubickfuß Blei eingesenkt wird, so ist die Gewalt, womit das Blei im Wasser sinkt,

$$p - m = 794,15 - 70 \text{ Pf.} = 724,15 \text{ Pf.}$$

So viel Kraft müßte man also noch anwenden, einen Kubikfuß Blei zurück zu halten, wenn er nicht im Wasser zu Boden sinken sollte.

42.

Wiegt man einen und denselben festen Körper in verschiedenen flüssigen Wesen, so verliert er desto mehr von seinem Gewichte, je weniger eigne Schwere das flüssige Wesen hat; und desto weniger, je dichter das flüssige Wesen ist. Daher stehen die eignen Schweren der Flüssigkeit im Verhältniß mit den Gewichten, welche ein fester Körper in ihnen verliert, oder mit den Gewichten, welche man anwenden muß, den Körper vor dem Sinken zu sichern. Es verhalten sich also die eignen Schweren der Flüssigkeiten, wie die Gewichte, welche der Körper in ihnen verliert.

Exempel. Es verliert ein Klumpen Glaß im Wasser 722 Gran, in Milch 744 Gran, in Terpentinöl 628 Gran; die eignen Schweren verhalten sich also wie

$$722 : 744 : 628 \text{ halbirt.}$$

$$361 : 372 : 314 \text{ durch 361 dividirt}$$

$$1 : \frac{372}{361} : \frac{314}{361} \text{ durch 10000 multiplizirt.}$$

$$10000 : \frac{3720000}{361} : \frac{3140000}{361}$$

$$10000 : 10304\frac{256}{361} : 8698\frac{22}{361} \text{ oder}$$

$$10000 : 10304 : 8698$$

welches die Verhältnisse der eignen Schweren nicht ganz genau giebt, da die Brüche weggelassen sind. Es ist aber dieses für etwas allgemeines genau genug, da das Wasser, die Milch, und das Terpentinöl verschieden sind.

43.

Wenn man für das Gewicht eines Kubikfusses Wasser 64 Pf. annimmt, die Gewichte eines Kubickfusses beider Materien sich wie ihre eignen Schweren verhalten und das Gewicht eines Kubikfusses Milch x heist, so ist

$$10000 : 10304 = 64 : x$$

$$x = \frac{10304 \cdot 64}{10000}$$

$$x = \frac{659456}{10000}$$

$$x = 65,9456 \text{ Pf.}$$

Da es hier auf große Schärfe nicht ankommt, so nimmt man blos für das Gewicht eines Kubikfusses Milch 65,9 Pf. an.

46.

Ein jeder Körper, welcher in eine Flüssigkeit getaucht wird, verliert so viel von seinem Gewichte, als ein gleich großes Stück der Flüssigkeit in freier Luft wiegt (38, 39.) Hat man also das Verhältniß der eignen Schwere A : B, auch die des Wassers = C; und der ersten Materie Gewicht in freier Luft ist = a, der zweiten = b; die erste verliert im Wasser α, die zweite β; ferner betrachte man ein gleich großes Stück Wasser als Materie, so verhält sich die eigne Schwere der ersten Materie zu der des Wassers, da die Räume gleich sind, wie das Gewicht der ersten Materie in freier Luft zu dem Gewichte eines gleich großen Stücks Wasser (30, I). Das Gewicht des Stücks Wasser, welches mit der Materie gleichen Kubikinhalt hat, sei = x; so ist also

$$A : C = a : x$$

Das Gewicht des Wassers ist dem Verluste der Materie, welche in dasselbe eingetaucht wird, gleich; folglich $x = \alpha$, und deßwegen

$$1)\ A : C = a : \alpha$$

Man habe eine andere Materie, und ein ihr gleiches Stück Wasser, dessen Gewicht $= z$ sei, so verhalten sich wieder die eignen Schweren, wie die Gewichte in freier Luft (30, 1). Also

$$C : B = z : b$$

Der Verlust der Materie ist abermal dem Gewichte des gleich großen Stücks Wasser gleich, also $z = \beta$, deßwegen

$$2)\ C : B = \beta : b$$

Diese Proportion 1, 2 mit einander multiplizirt (Nr. V, 50.)

$$A : C = a : \alpha\ (1)$$
$$C : B = \beta : b\ (2)$$
$$\overline{A . C : B . C = a . \beta : b\alpha}$$
$$\overline{A : B = a . \beta : b . \alpha}$$

Es verhalten sich also die eignen Schweren zweier Materien, wie die Produkte aus den Gewichten in freier Luft mit den umgekehrten Verlusten im Wasser multiplizirt.

48, 1.

Aus den Verhältnissen in 46, 1, 2 bekommt man

$$A = \frac{a}{\alpha} . C \text{ und } B = \frac{b}{\beta} . C$$

Es kommt also die eigne Schwere eines Körpers heraus, wenn man das Gewicht, welches er in freier Luft hat, durch das Gewicht, welches er im Wasser ver-

liert, dividirt, und den Quotienten mit der eignen Schwere des Wassers multiplizirt. Nimmt man nun des Wassers eigne Schwere beständig = 1 an, so giebt blos der Quotient, welcher herauskommt, wenn das Gewicht der Materie in freier Luft durch den Verlust im Wasser dividirt wird, die eigne Schwere des Körpers an. Folglich kann man sagen

$$A = \frac{a}{\alpha} \text{ und } B = \frac{b}{\beta}$$

49.

Wenn man einerlei Gefäß einmal mit Wasser, das andere mal Quecksilber gefüllt, wiegt, so kann man die eigne Schwere des Quecksilbers gegen die des Wassers finden. Z. B. man wiege ein Gefäß voll Wasser, welches 18 Loth wiegt, dann wiege man das nemliche Gefäß mit Quecksilber gefüllt, wo man findet, daß das Quecksilber 252,342 Loth wiegt. Weil sich nun nach 30 die eignen Schweren zu einander verhalten, wie die Gewichte bei einerlei Räumen, so kann man sagen, die eigne Schwere des Wassers = 1000 gesetzt,

$$18 : 252{,}342 = 1000 : \frac{1000 \,.\, 252{,}342}{18}$$

$$18 : 252{,}342 = 1000 : \frac{252342}{18}$$

$$18 : 252{,}342 = 1000 : 14019$$

Die eigne Schwere des Quecksilbers also ist 14019, wenn die des Wassers 1000 ist.

50.

Wenn zwei Stücken Drath einerlei Stärke und einerlei Länge haben, so haben sie einerlei Inhalt, oder füllen einerlei Raum aus. (Geom. 59. S. 4. Z.) Wenn die Längen verschieden, die Stärken aber, oder welches einerlei ist, die Durchmesser der Grundflächen, daher auch die ganzen Grundflächen gleich sind, so verhalten sich die Inhalte oder Räume wie ihre Längen. Sind die Räume V ; v, die Längen L ; l, so ist

$$1)\ V : v = L : l$$

Es sollen P und p die Gewichte seyn, so verhalten sich diese, wie die Räume, multiplizirt mit ihren eignen Schweren (30, 3); daher

$$P : p = G . V : g . v$$

$$P . g . v = G . V . p$$

Aus I ist $V . l = v . L$

$$P . g . v . V . l = G . V . p . v . L$$

$$P . g . l = G . p . L$$

$$2)\ P : p = G . L : g . l$$ (Ar. V, 33.)

Sind die Gewichte gleich, also $P = p$, so bekommt man aus 2)

$$1 : 1 = G . L : g . l$$

$$G . L = g . l$$

$$L : l = g : G$$ (Ar. V, 33.)

52, I.

Das Gewicht des Metalles A sey a, es verliere im Wasser α; des Metalls B Gewicht sey b, der Verlust im Wasser β, diese beiden Metalle sollen vermischt werden,

und diese Mischung heise M, wiege m, verliere im Wasser μ.

In der Mischung befinde sich vom Metalle A das Gewicht x, so enthält die Mischung m – x vom andern Metalle B. Nun verhalten sich bei einerlei Metalle die Verluste im Wasser, wie die Gewichte, folglich

$$a : x = \alpha : \frac{x . \alpha}{a}$$

Der Verlust, den das Gewicht x vom Metalle A verliert, ist also $\frac{x . \alpha}{a}$. Ferner muß bei dem Metalle B

$$b : m - x = \beta : \frac{(m - x) . \beta}{b}$$

Der Verlust des Gewichts m – x vom Metalle B muß $\frac{(m - x) . \beta}{b}$ seyn.

Die Verluste der beiden Metalle, wenn jedes vor sich im Wasser abgewogen wird, müssen so viel betragen, als der Verlust der Mischung, welche aus beiden Metallen besteht. Daher

$$\frac{x . \alpha}{a} + \frac{(m - x) . \beta}{b} = \mu$$

$$\frac{x . \alpha . b}{a} + (m - x) . \beta = \mu . b$$

$$x . \alpha . b + (m - x) . \beta . a = \mu . b . a$$

$$x . \alpha . b + m . \beta . a - x . \beta . a = \mu . b . a$$

$$x . \alpha . b - x . \beta . a = \mu . b . a - m . \beta . a$$

$$(\alpha . b - \beta . a)\, x = \mu . b . a - m . \beta . a$$

$$x = \frac{\frac{\mu . b . a - m . \beta . a}{\alpha . b - \beta . a}}{}$$

$$x = \frac{\mu . b - m . \beta}{\alpha . b - \beta . a}$$

52, III.

Hat man ein Stück Metall und ein gleich großes Stück Wasser, so verhält sich das Gewicht des Wassers zum Gewichte des Metalls $= a$, wie die eigne Schwere des Wassers zur eignen Schwere des Metalls $= f$ (30, I). Es ist aber der Verlust des Metalls im Wasser dem Gewichte eines gleich großen Stücks Wasser gleich, und $\alpha =$ dem Verlust des Metalls im Wasser (38), daher kann man sagen, wenn die eigne Schwere des Wassers $= 1$ angenommen wird

$$\alpha : a = 1 : f$$

$$A) \; f = \frac{a}{\alpha}$$

Eben so ist des zweiten Metalls Gewicht $= b$, die eigne Schwere $= g$, der Verlust im Wasser $= \beta$ gesetzt

$$\beta : b = 1 : g$$

$$B) \; g = \frac{b}{\beta}$$

Ferner ist für die Mischung, wenn man das Gewicht $= m$, den Verlust im Wasser $= \mu$, die eigne Schwere $= h$, nimmt

$$\mu : m = 1 : h$$

$$C) \; h = \frac{m}{\mu}$$

In 31, VII, Z) heißt es $V = \frac{P}{G}$, wo V den Raum, P das Gewicht, und G die eigne Schwere bedeutet. Es sei auch hier V der Raum, $P = x$, $G = f$, so ist

$$1)\ V = \frac{x}{f}$$

Eben so sei V wieder der Raum für das andere Metall, $P = m - x$; $G = g$, so ist

$$2)\ V = \frac{m - x}{g}$$

Setzt man für die Mischung der beiden Metalle $P = m$; $G = h$, und V bedeutet auch hier den Raum, so hat man wieder

$$3)\ V = \frac{m}{h}$$

Die Räume kommen also heraus, wenn man die Gewichte durch die eignen Schweren dividirt.

52, IV, V.

Nimmt man die Räume, welche jedes Metall für sich einnimmt, zusammen, so muß die Summe dieser Räume dem Raume der Mischung gleich seyn. Folglich

$$\frac{x}{f}\,(52, \text{III}, 1) + \frac{m - x}{g}\,(52, \text{III}, 2) = \frac{m}{h}\,(52, \text{III}, 3)$$

$$x + \frac{mf - fx}{g} = \frac{mf}{h}$$

$$gx + mf - fx = \frac{mfg}{h}$$

$$gxh + mfh - fxh = mfg$$

$$gxh - fxh = mfg - mfh$$

$$(gh - fh) . x = mfg - mfh$$

$$x = \frac{mfg - mfh}{gh - fh}$$

$$\text{I)}\ x = \frac{mf . (g - h)}{h . (g - f)}$$

Diese Formel auch so wie in 52, III, auf Zinn angewendet, soll ebenfalls hier

$$a = 37 ; \alpha = 5$$
$$b = 23 ; \beta = 2$$
$$m = 120 ; \mu = 14 \text{ seyn.}$$

$$f = \frac{a}{\alpha} (52, \text{III}, A) = \frac{37}{5} = 7,4$$

$$g = \frac{b}{\beta} (52, \text{III}, B) = \frac{23}{2} = 11,5$$

$$h = \frac{m}{\mu} (52, \text{III}, C) = \frac{120}{14} = 8,57+$$

$$x = \frac{mf (g - h}{h (g - f)} (\text{I}) = \frac{120 . 7,4 (11,5 - 8,57+)}{8,57+ . (11,5 - 7,4)}$$

$$120 . 7,4 = 12 . 74$$

$$x = \frac{12 . 74 (11,5 - 8,57+)}{8,57+ . (11,5 - 7,4}$$

$$A)\ x = \frac{12 . 74 . 2,93 -}{8,57+ . 4,1}$$

$$B)\ x = \frac{2601,84 -}{35,137+}$$

$$x = \frac{2601,84 - . 1000}{35,137 + . 1000}$$

$$x = \frac{2601840 -}{35137 +}$$

$$x = 74,04 -$$

Für h ist 8,57 etwas zu klein, denn h = 8 + einem unendlichen Dezimalbruch, daher wurde h = 8, 57 + gesetzt. Nun wurde bei *A)* von 11,5 die Zahl 8,57 + abgezogen, folglich wurde 2,93 etwas zu groß, weßwegen es mit 2,93 − bezeichnet ist. Bei *B)* ist das Produkt von 8,57 . 4,1 = 35,137 zu klein, daher ist es mit + bezeichnet. Endlich ist x = 74,04 zu groß, daher ist es x = 74,04 − gesetzt worden. x war zu groß, weil etwas zu großes durch etwas zu kleines dividirt wurde, welches einen zu großen Quotienten gab. Würde die Rechnung durch gemeine Brüche geführt worden seyn, so würde man auch nicht mehr und nicht weniger als 74 für x gefunden haben, wie in 52, II. Es sind also bei dieser Mischung 74 Pf. Zinn und 46 Pf. Blei, zusammen 120 Pf.

52, VI.

Man nehme von zwei Metallen gewisse Pfunde, so nemlich, daß x in 52, IV, auch bestimmt ist. Z. B. man habe 74 Pf. Zinn, und 46 Pf. Blei; diese Metalle müssen beim Zusammenschmelzen, **wenn beim Schmelzen nichts verlohren ging,** wieder so viel an Gewicht und Raum geben, als die Summe derselben 120 Pf. beträgt. Es sei also x = 74 Pf. m = 120 Pf., m − x = 64 Pf., die eignen Schweren sollen auch bekannt seyn, die des Zinnes sei wieder wie in 52, IV, V der Erläut. f = 7,4; und die des Bleies g = 11,5. Man wiege die Mischung im

Wasser ab, wo man findet, daß sie $\mu = 14$ Pf. verliert; aus diesem Verluste und dem Gewichte findet man die eigne Schwere dieser Mischung, wenn man nemlich das Gewicht durch den Verlust im Wasser dividirt (52, III, C).

Daher $\frac{m}{\mu} = h = \frac{120}{14} = 8,57+$

Es muß also in der Gleichung

$$\frac{x}{f} + \frac{m-x}{g} = \frac{m}{h} \quad (52, IV)$$

auf beiden Seiten einerlei herauskommen, **wenn beim Schmelzen, sowohl am Gewichte, als am Raume nichts verlohren gehet** Folglich

$$\frac{74}{7,4} + \frac{120-74}{11,5} = \frac{120}{8,57+}$$

$$\frac{74}{7,4} + \frac{46}{11,5} = \frac{120}{8,57+}$$

$$10 + 4 = 14+$$

$$14 = 14+$$

Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, kommt noch ein kleiner Dezimalbruch heraus, welcher abermals von dem zu kleinen h herrührt; man kann aber annehmen, daß beide Zahlen völlig gleich sind. Dieß zeigt also an, daß die Mischung beim Schmelzen weder etwas am Gewichte noch Raume verlohren hat. Hätte die Mischung etwas verlohren, so daß vielleicht beim Schmelzen etwas verflogen wäre, so würde weder das Gewicht der Mischung die Summe der Gewichte der beiden Metalle, noch der Verlust im Wasser der nemliche seyn, sondern m < 120, und auch $\mu < 14$, daher könnte immer $\frac{m}{\mu} = h$, oder $\frac{m}{h}$ kleiner

als 14 seyn. Andere Fälle, bei welchen $\frac{m}{h}$ kleiner als 14 würde, sind auch noch möglich.

59.

Da das Gewicht des Wassers, welches sich in dem Raume BC befindet, dem Gewichte des ganzen Körpers AC gleich ist, (58, I) so muß, wenn das Gewicht des Wassers, welches den Raum BC ausfüllt = p, das Gewicht des Stücks BC zu finden

$$\text{I)}\ AC : BC = p : \frac{BC}{AC} \cdot p$$

seyn, welches das Gewicht des Stücks BC angiebt.

Die eignen Schweren zweier gleich schweren Massen verhalten sich verkehrt, wie die Räume, welche sie einnehmen (31, III). Dort steht

$$\frac{P}{V} : \frac{p}{v} = G : g$$

wo P ; p Gewichte, V ; v Räume, G ; g eigne Schweren sind. Hieraus ist

$$\frac{P \cdot g}{V} = \frac{p \cdot G}{v}$$

$$P = p$$

$$\frac{g}{V} = \frac{G}{v}$$

$$g \cdot v = G \cdot V$$

$$G : g = v : V$$

Wenn hier AC ; BC die Räume sind, so daß V = AC; v = BC, so ist

$$G : g = BC : AC \text{ oder}$$
$$g : G = AC : BC.$$

Es ist aber auch

$$AC : BC = p : \frac{BC}{AC} \cdot p \;(1)$$

das ist, wie das Gewicht des ganzen Körpers zum Gewichte des eingetauchten Theils. Daher ist auch

$$g : G = AC : BC = p : \frac{BC}{AC} \cdot p = 1 : \frac{BC}{AC}$$

Wenn G die eigne Schwere des Körpers, und g die des Wassers ist, so heist die Proportion: die eigne Schwere des Wassers verhält sich zu der des Körpers, wie der ganze Körper zum eingetauchten Theile des Körpers.

61, I.

Es sei hier, so wie in 46, auch A die eigne Schwere des einen, B die des andern Körpers; α der Verlust des ersten im Wasser, β der des andern; a das Gewicht des ersten, b des andern; h der Verlust im Wasser der beiden mit einander verbundenen Körper, welchen man sucht. h muß daher der Summe der einzelnen Verluste im Wasser gleich seyn, also $h = \alpha + \beta$. Der Verlust eines Körpers im Wasser kommt heraus, wenn man das Gewicht desselben durch seine eigne Schwere dividirt (48, II). Daher

$$h = \alpha + \beta = \frac{a}{A} + \frac{b}{B}.$$

61, II.

Wenn diese beiden Körper mit einander verbunden im Wasser mehr verlieren, als sie zusammen genommen

wiegen, so sinkt der Körper. Weil hier ein gleich großes Stück von der Flüssigkeit nicht das Gewicht des Körpers hat, so kann die Flüssigkeit dem Sinken des Körpers nicht widerstehen, welches sie nur einem Stücke von der nemlichen Flüssigkeit, oder einem Körper von gleichem Gewichte zu thun im Stande ist.

61, III.

Ist der Verlust des Körpers in der Flüssigkeit, in welche er eingetaucht wird, dem Gewichte gleich, so schwimmt er in jeder Schicht der Flüssigkeit; ist der Verlust des Körpers in der Flüssigkeit kleiner als sein Gewicht, so schwimmt er auf der Oberfläche der Flüssigkeit.

61, IV.

Hat man zu untersuchen, wie das Verhältniß der eignen Schwere des Korks = B zu der des Wassers ist, so findet man dieses aus dem gegebenen Gewichte des Bleies = a, der eignen Schwere desselben = A, dem Gewichte des Korks = b, und dem Gewichte, welches man anwenden muß, das Blei mit dem Korke zurück zu halten, damit beide nicht zu Boden sinken. Aus 61, I, ist

$$h = \frac{a}{A} + \frac{b}{B}$$

$$h \cdot A = a + \frac{b \cdot A}{B}$$

$$h \cdot A \cdot B = aB + b \cdot A$$

$$h \cdot A \cdot B - a \cdot B = b \cdot A$$

$$(h \cdot A - a) \cdot B = b \cdot A$$

$$B = \frac{b \cdot A}{h \cdot A - a}$$

61, V.

Man habe einen Menschen, welcher $b = 161$ Pf. wiege, und soll eine Menge Wasser von 2,573 Kubikfussen aus seiner Stelle treiben, welche 2,573 Kubikfuß 160,8 Pf. wiegen, folglich verliert der Mensch 160,8 Pf. im Wasser. Es verhält sich also die eigne Schwere des Menschen $= B$, zu der des Wassers, wie 160,8 : 161 (30, I), oder beinahe wie 161 : 161 = 1 : 1. Da die eigne Schwere des Wassers = 1 gesetzt wird, so kann man also auch $B = 1$ setzen. Hat dieser Mensch 8 Pf. Kork $= a$ an sich, und die eigne Schwere des Wassers zu der des Korks verhält sich wie $1 : \frac{1}{4}$. also $A = \frac{1}{4}$, so ist der Verlust des Menschen im Wasser mit dem Korke verbunden

$$h = \frac{a}{A} + \frac{b}{B} \quad (61, I.)$$

$$h = \frac{8}{\frac{1}{4}} + \frac{161}{1}$$

$$h = 32 + 161 = 193$$

Das Gewicht des Menschen und des Korks ist $= b + a = 161 + 8 = 169$, folglich

$$h > b + a$$

$$193 > 169.$$

Also schwimmt der Mensch (61, III) und zwar mit dem Ueberschusse über 169, d. i. mit 24 Pf. (55).

63.

Da die Menge Wasser, welche durch einen eingetauchten Körper aus ihrer Stelle getrieben wird, eben so schwer,

als der ganze Körper, aber nicht größer als der eingetauchte Theil des Körpers ist, so darf man nur das Gewicht einer gewissen Menge Wasser und den Kubikinhalt des eingetauchten Theils des Körpers wissen, daraus das Gewicht des ganzen Körpers, welcher eingetaucht wird, zu finden. Man weiß das Gewicht eines Kubikfusses Wasser, dieses sei = m, der eingetauchte Theil des Körpers = u Kubikfusse; so verhält sich 1 Kbkf. zu u Kbkf., wie das Gewicht von 1 Kbkf. Wasser = m, zu dem Gewichte von u Kbkf. Wasser, welches Gewicht von u Kbkf. Wasser man = p setzt.

$$1 : u = m : p$$

$$p = m \cdot u$$

Das Gewicht dieser u Kbkf. Wasser ist dem Gewichte des ganzen Körpers gleich.

64.

Hat man das Gewicht eines Kubikfusses von der Materie des Körpers = q, und den Raum, den der ganze Körper einnimmt, = v, so kann man auch hier sagen, wie sich 1 Kbkf. zu v Kbkf. verhält, so verhält sich das Gewicht von 1 Kbkf. der Materie = q zum Gewichte von v Kbkf. der Materie = p. Also

$$1 : v = q : p$$

$$p = q \cdot v$$

$$p = m \cdot u \quad (63)$$

$$qv = mu$$

Hieraus kann man eben so, wie in 59, das Gewicht des eingetauchten Theils des Körpers finden, wenn man sagt: es verhält sich der Raum des ganzen Körpers = v, zum eingetauchten Theile = u, wie sich das Gewicht des

ganzen Körpers = p = qv = mu, zum Gewichte des eingetauchten Theils des Körpers verhält. Also

$$v : u = qv : \frac{u}{v} . qv$$

Da sich die eigne Schwere des Wassers zu der des Körpers verhält, wie das Gewicht des ganzen Körpers zum Gewichte des eingetauchten Theils, so findet man auch, wie in 59, das Verhältniß der eignen Schwere des Körpers gegen die des Wassers.

$$qv : \frac{u}{v} . qv = 1 : \frac{u}{v}$$

Die eigne Schwere des Wassers verhält sich zu der des Körpers, wie 1 zu dem Quotienten, welcher heraus kommt, wenn der Kubikinhalt des eingetauchten Theils durch den Kubikinhalt des ganzen Körpers dividirt wird.

65.

Aus $p = mu$ in 63 bekommt man $u = \frac{p}{m}$, wenn das Gewicht des ganzen Körpers gegeben ist. Dieß u ist also die Größe des eingetauchten Theils des Körpers, welche heraus kommt, wenn man des ganzen Körpers Gewicht durch das Gewicht eines Kubikfusses Wasser dividirt.

66, II.

Man nehme p = dem Gewichte der Materie, welche auf dem Wasser schwimmen soll, aber spezifisch schwerer ist als Wasser, folglich so wie sie ist, nicht schwimmen kann; den Raum, den die Materie, den Raum der Höhlung mitgerechnet, einnimmt = z; das Gewicht eines Kubikfusses Wasser = m, so findet man zuerst das Gewicht des Was-

sers, welches den Raum z, oder den Raum der ausgedehnten Materie einnimmt, wenn man sagt: wie sich 1 Kbkf. zu z Kbkf. verhält, so verhält sich das Gewicht von 1 Kbkf. Wasser $= m$, zum Gewichte von z Kbkf. Wasser, nemlich

$$1 : z = m : m \cdot z$$

Soll die Materie im Wasser weder steigen noch sinken, sondern an einem jeden Orte still stehen, so muß

$$p = m \cdot z$$

$$1) \ \frac{p}{m} = z$$

welches den gesuchten Raum giebt, in welchen die Materie ausgedehnt werden muß, wenn die spezifisch schwerere Materie auf dem Wasser schwimmen soll.

66, III, Exempel.

Man soll 30 Pfund Metall zu einer Kugel machen, daß sie im Wasser schwimmt, wie groß muß der Durchmesser dieser Kugel seyn? Für das Gewicht eines Kubikfusses Wasser nehme man $m = 70$ Pf., und $p = 30$ Pf, so ist

$$2) \ z = \frac{p}{m} \ (66, 1) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

Nun ist in Geom. 65. S. 6. Z. aus dem Inhalte der Kugel ihren Diameter zu finden gelehrt worden, wo man findet, daß, wenn d den Durchmesser und π die Verhältnißzahl der Peripherie zu ihrem Diameter, welcher $= 1$ gesetzt wird, bedeutet.

$$d^3 = 6 \cdot S \cdot \frac{1}{\pi},$$

$$S = z = \frac{3}{7} \ (2)$$

$$d^3 = 6 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$d^3 = \frac{6 \cdot 3}{7 \cdot \pi} = \frac{18}{7 \cdot \pi}$$

$$\pi = 3{,}1415926 \ldots.$$

$$d^3 = \frac{18}{7 \cdot 3{,}1415926 \ldots.}$$

$$d^3 = \frac{18}{7} : 3{,}1415926 \ldots.$$

$$\log d^3 = \log \frac{18}{7} - \log 3{,}1415926 \ldots.$$

$$\log 18 = 1{,}2552725$$
$$\log \ 7 = 0{,}8450980$$

$$\log \frac{18}{7} = 0{,}4107745$$

1) Davon soll der log 3,1415926.... abgezogen werden, welchen man in den Tafeln, welche die Logarithmen nur bis auf 10000, und nur bis auf sieben Dezimalstellen berechnet enthalten, nicht findet. Will man ihn doch haben, so suche man zuerst den Logarithmen für die fünf ersten Ziffern der Zahl, für 31415 nach der Anweisung, welche in Mech. 123 der Erläut. gegeben ist.

$3142 \cdot 10 = 31420 \quad \log 31420 = 4,4972062$
$3141 \cdot 10 = 31410 \quad \log 31410 = 4,4970679$

a) 1383

$$10 : 5 = 1383 : 692$$
$$5$$
$$a)\ 691,5 = 692$$

$$\log 31410 = 4,4970679$$
$$5 \qquad\qquad 692$$
$$A)\ \log 31415 = 4,4971371$$

2) Nun suche man auf die nemliche Art den Logarithmen zu den ersten fünf Ziffern, da die letzte um 1 vergrösſert ist, nemlich zu 31416; hierzu ist die nöthige Differenz der Logarithmen von 31410 und 31420, zwischen welche Zahlen diese Zahl fällt, gefunden; sie ist 1383 (1, a). Also sage man

$$10 : 6 = 1383 : 830$$
$$6$$
$$829,8 = 830$$

$$\log 31410 = 4,4970679$$
$$6 \qquad\qquad 830$$
$$B)\ \log 31416 = 4,4971509$$

3) Diesen Logarithmen B) braucht man, den Logarithmen für die sechs ersten Ziffern der Zahl zu finden. Es fällt 314159 zwischen 314150 und 314160. Es verhält sich nun wieder 10 zu der sechsten Ziffer [9] als Einheiten betrachtet, wie der Unterschied der Logarithmen von den Zahlen, zwischen welche die gesuchte Zahl fällt, zu dem Unterschiede der Logarithmen der gesuchten Zahl von sechs Ziffern und der nächst kleinern.

Die Zahlen, zwischen welche die Zahl mit sechs Ziffern: 314159 fällt, sind

31416 . 10 = 314160 log 314160 = 5,4971509 (2 *B*)
31415 . 10 = 314150 log 314160 = 5,4971371 (1 *A*)

c) 138

Hieraus kann man den Unterschied der Logarithmen der gesuchten Zahl und der nächst kleinern finden.

$$10 : 9 = 138 : 124$$
$$\underline{\quad 9 \quad}$$
$$\gamma)\ 124{,}2 = 124$$

$$\log 31450 = 5{,}4971371\ (1, A.)$$
$$\underline{\qquad 9 \qquad\qquad 124}$$
$$C)\ \log 31459 = 5{,}4971495$$

4) Den Logarithmen von der Zahl von sechs Ziffern, davon die letzte um 1 vermehrt ist, hat man zu wissen nöthig, den Logarithmen für die Zahl mit sieben Ziffern zu finden. Es ist also der log 314159 + 1 = log 314160 nöthig. Hier ereignet sich der Vortheil, daß dieser Logarithme schon in (2, *B*) gefunden ist, indem man nur den Logarithmen von 31416 zu nehmen und seine Kennziffer um eine Einheit zu vermehren braucht. Wäre er aber für eine andre Zahl von sechs Ziffern zu finden, so müßte er wie in 3 gesucht werden.

$$Z)\ \log 314160 = 5{,}4971509.$$

5) Nun suche man den Logarithmen für die Zahl von sieben Ziffern, zu 3141592; diese fällt zwischen 314590 und 314600. Es muß sich auch hier 10 zu der siebenten Ziffer [2] verhalten, wie sich der Unterschied der Logarithmen der Zahlen, zwischen welche die Zahl, für welche man den Logarithmen sucht, fällt, zum Unterschiede der Loga-

rithmen der Zahl, für welche der Logarithme gesucht wird, und der nächst kleinern verhält.

314160 . 10 = 3141600 log 3141600 = 6,4971509 (4, Z)
314159 . 10 = 3141590 log 3131590 = 6,4971495 (3, C)

d) 14

10 : 2 = 14 : 3
2
δ) 2,8 = 3

log 3141590 = 6,4971495 (3, C)
2 3

D) log 3141592 = 6,4971498

6) Abermals suche man den Logarithmen für die Zahl von sieben Ziffern, davon die letzte um 1 vermehrt ist, zu 3141593. Dazu ist auch der Unterschied der Logarithmen der Zahlen, zwischen welche diese Zahl fällt, gefunden. Die Zahl fällt zwischen 3141590 und 3141600, deren Logarithmen Unterschied 14 (5, *d*) ist. Daher hat man

10 : 3 = 14 : 4
3
4,2 = 4

log 3141590 = 6,4971495
3 4

E) log 3141593 = 6,4971499

7) Dieser Logarithme ist nöthig, den Logarithmen zu der Zahl mit acht Ziffern, zu 31415926 zu finden. Es verhält sich wieder 10 zu der achten Ziffer [6], wie der Unterschied der Logarithmen der Zahlen, zwischen welche die gesuchte Zahl fällt, zu dem Unterschiede der Logarithmen von der gegebenen und der nächst kleinern Zahl. Man

muß also den Unterschied der Logarithmen von 31415930 und 31415920 suchen

$3141593 \cdot 10 = 31415930 \quad \log 31415930 = 7{,}4971499 \; (6, E)$
$3141592 \cdot 10 = 31415920 \quad \log 31415920 = 7{,}4971498 \; (5, D)$

$f) \; 1$

Den Unterschied zwischen den Logarithmen der gegebenen Zahl und der nächst kleinern zu finden, ist

$$10 : 6 = 1 : 1$$
$$6$$
$$\phi) \; 0{,}6 = 1$$

$$\log 31415920 = 7{,}4971498$$
$$6 \qquad\qquad 1$$
$$F) \; \log 31415926 = 7{,}4971499$$

8) Man betrachte die Unterschiede der Logarithmen, welche man suchte, die Logarithmen für die Zahlen mit immer mehrern Ziffern zu finden (sie sind 1383 (1, *a.*); 138 (3, *c*); 14 (5, *d.*); 1 (7, *f.*)) so sieht man, daß der zweite, dritte und vierte Unterschied der Logarithmen entsteht, wenn man vom ersten Unterschiede immer eine Ziffer nach der andern von der rechten Hand her abschneidet, und wenn die Zahl, welche man abschneidet, größer als 5 ist, die folgende nach der linken Hand zu um 1 vermehrt. Wenn man hier vom ersten Unterschiede 1383, die letzte Ziffer abschneidet, so bleibt der zweite Unterschied 138 übrig; von diesem die letzte Ziffer abgeschnitten, bleibt der dritte Unterschied 13 übrig; da aber 8 abgeschnitten wird, welche größer als 5 ist, so kann man für den dritten Unterschied 14 setzen; von diesem die letzte Ziffer abgeschnitten, bleibt der vierte Unterschied 1 übrig. Man kann also diese Unterschiede sehr leicht finden, wenn man den ersten wirklich macht.

9) Nun wurde, den Logarithmen für die Zahl mit fünf Ziffern zu finden, der erste Unterschied [1383] mit der fünften Ziffer [5] multiplizirt, und mit 10 dividirt, dann zu dem Logarithmen der Zahl mit vier Ziffern aber, welche zehnmal größer war, addirt; hier zu log 31410 addirt

der erste Unterschied = 1383
die fünfte Ziffer = 5

ε) durch 10 dividirt 691,5 = 692

log 31410 = 4,4970679
5 692

G) log 31415 = 4,4971371

10) Ferner für die Zahl mit sechs Ziffern, wurde der zweite Unterschied [138] mit der sechsten Ziffer [9] multiplizirt, mit 10 dividirt, und dann zu dem Logarithmen der Zahl mit fünf Ziffern, welche zehnmal größer war, addirt, das ist, zu log 314150 addirt.

der zweite Unterschied = 138
die sechste Ziffer = 9

ζ) durch 10 dividirt 124,2 = 124

log 314150 = 5,4971371 (1, *A*) (9, *G*)
9 124

H) log 314159 = 5,4971495

11) Den Logarithmen für die Zahl mit sieben Ziffern zu finden, mußte die dritte Differenz [14] mit der siebenten Ziffer [2] multiplizirt, mit 10 dividirt, und dann zu dem Logarithmen der Zahl mit sechs Ziffern durch 10 multiplizirt, addirt werden, das ist, zum log 3141590 addirt werden.

Die dritte Differenz = 14
die siebente Ziffer = 2

η) durch 10 dividirt 2,8 = 3

log 3141590 = 6,4971495 (3, C) (10, H)
2 3

J) log 3141592 = 6,4971498

12) Endlich den Logarithmen für die Zahl mit acht Ziffern zu finden, wurde die vierte Differenz [1] mit der achten Zahl [6] multiplizirt, mit 10 dividirt, und dann zum Logarithmen der Zahl von sieben Ziffern durch 10 multiplizirt, addirt, das ist zum log 31415920 addirt.

Die vierte Differenz = 1
die achte Ziffer = 6

λ) durch 10 dividirt 0,6 = 1

log 31415920 = 7,4971498 (5, D) (11, J)
6 1

log 31415926 = 7,4971499 = log π.

13) Der Logarithme der ersten vier Ziffern [log 3141] ist der Hauptlogarithme, zu diesem werden alle die Zahlen 692 (1, α) (9, ε); 124 (3, γ) (10, ζ); 3 (5, δ) (11, η); 1 (7, φ) (12, λ) addirt,

den log 31415926 zu finden.

log 3141 = 3,4970679

den log 31415 zu finden, wird addirt $\frac{5 \cdot 1383}{10}$ = 692 (1, α) (9, ε)

log 31415 = 4,4971371

für log 314159 $\frac{9 \cdot 138}{10}$ = 124 (3, γ) (10, ζ)

log 314159 = 5,4971495

für log 3141592 $\frac{2 \cdot 14}{10}$ = 3 (3, γ) (11, η)

log 3141592 = 6,4971498

für log 31415926 $\frac{6 \cdot 1}{10}$ = 1 (7, φ) (12, λ)

log 31415926 = 7,4971499

Oder überhaupt addirt man zum log 31410000 die Zahlen, wie hier folgt:

log 31410000	=	7,4970679	
Differenz f. 5	=	692	(1, α)
Differenz f. 9	=	124	(3, γ)
Differenz f. 2	=	3	(5, δ)
Differenz f. 6	=	1	(7, φ)
log 31415926	=	7,4971499	also

log 3,1415926.... = 0,4971499

π = 3 + einem unendlichen Dezimalbruch, wovon der genauere Logarithme folgender ist:

log π = 0,4971498726941338543513
oder log π = 0,49714987
wofür man setzen kann
log π = 0,4971499

14) Will man daher einen Logarithmen für eine Zahl, welche mehr als vier Ziffern hat, aus den gewöhnlichen Tafeln finden, so darf man nur die Differenz des Logarithmen, welcher zu den vier ersten Ziffern der Zahl gehört, und des Logarithmen, welcher zu den vier ersten Ziffern, da die vierte rechter Hand um 1 vermehrt ist, gehört, durch die fünfte Ziffer multipliziren und davon eine Ziffer für Zehntheile abschneiden.

15) Von der in 14 gesuchten Differenz schneide man eine Ziffer ab, und lasse sie weg, wenn sie kleiner als 5 ist, vermehre aber die vorletzte um 1, wenn die letzte Ziffer der Differenz größer als 5 ist. Dann multiplizire man die um eine Ziffer verminderte Differenz mit der sechsten Ziffer, und schneide die letzte Ziffer für Zehntheile ab.

16) Man lasse ferner von der Differenz zwei Ziffern weg, wobei man eben das beobachtet, was in (15) ist erinnert worden, wenn die Ziffer größer oder kleiner als 5 ist, multiplizire die um zwei Ziffern verminderte Differenz durch die siebente Ziffer der Zahl, und schneide von diesem Produkte auch die letzte Ziffer für Zehntheile ab.

17) Endlich wenn die Zahl acht Ziffern hat, so schneide man von der Differenz drei Ziffern ab, und multiplizire den Ueberrest, der höchstens noch aus einer Ziffer bestehen wird, mit der achten Ziffer, und schneide davon auch die letzte Ziffer für Zehntheile ab.

18) Die in 14, 15, 16, 17 gefundenen Zahlen addire man zu dem Logarithmen der vier ersten Ziffern, dessen Kennziffer eine Einheit weniger als die Zahl Ziffern für Ganze hat, so bekommt man den Logarithmen der ganzen Zahl. Ein Exempel findet vielleicht noch seinen Nutzen. Es sey log 35687846 zu finden.

$$\left.\begin{array}{l} \log 35690000 = 7{,}5525465 \\ \log 35680000 = 7{,}5524248 \end{array}\right\} (14)$$

$$\overline{1217}$$

Es ist nicht nöthig, die ganzen Logarithmen hin zu schreiben, wenn man ihre Differenz suchen will, sondern es unterscheiden sich nur die vier letzten Dezimalziffern, welche

man also nur hin schreiben, oder in den Tafeln gleich abziehen darf.

$$\log 35680000 = 7,5524248$$

$$\text{wegen der } 7 \; \frac{7 \cdot 1217}{10} = \quad 852 \; (14)$$

$$\text{— — } 8 \; \frac{8 \cdot 122}{10} = \quad 98 \; (15)$$

$$\text{— — } 4 \; \frac{4 \cdot 12}{10} = \quad 5 \; (16)$$

$$\text{— — } 6 \; \frac{6 \cdot 1}{10} = \quad 1 \; (17)$$

$$\log 35687846 = 7,5525204$$

19) Man kann nur den Logarithmen für eine Zahl mit sieben, höchstens acht Ziffern durch Proportionaltheile aus den Tafeln, welche auf nicht mehr als sieben Dezimalstellen berechnet sind, finden. Soll man aber doch den Logarithmen für eine Zahl, welche mehr als sieben oder acht Ziffern hat, suchen, so sucht man den Logarithmen für die ersten sieben oder acht Ziffern der Zahl (wenn die achte auf den Logarithmen noch Einfluß hat) und setzt dann die gehörige Kennziffer davor, welches anzeigt, daß man die übrigen Ziffern als bloße Nullen betrachtet.

$$\log 35687846324578 9 = 14,5525203.$$

Läßt sich aber die Zahl in Faktoren zerfällen, von welchen man noch die genauen Logarithmen finden kann, so kann man die Logarithmen der Faktoren zusammen addiren, welche den Logarithmen der Zahl geben.

Nun wollen wir wieder zu unserer Berechnung des d^2 kommen.

Es sollte vom $\log \frac{18}{7}$ der $\log \pi = \log 3,1415926....$ abgezogen werden.

$$\log \frac{18}{7} = 0,4101745$$
$$\log \pi = 0,4971499$$
$$\log d^3 = 0,9130246 - 1 \text{ oder}$$
$$\log d^3 = 2,9130246 - 3$$
$$3 \log d = 2,9130246 - 3$$
$$3 \text{ div.}$$
$$\log d = 0,9710082 - 1$$
$$H) \; d = 0,93542 \text{ Fuß.}$$

Hat man den Diameter der Kugel, so kann man die Kugel selbst nach Anleitung der Geometrie verfertigen.

Man verlangt zu wissen, wie stark die metallische Schaale der Kugel sei? Wenn das Gewicht dieser Kugel $= p$ ist, und das Gewicht eines Kubikfusses des Metalls $= q$; so verhält sich das Gewicht eines Kubikfusses von dem Metalle zum Gewichte der ganzen Kugel, wie ein Kubikfuß, zum Kubikinhalte der ganzen Kugel (30, 2). Daher

$$q : p = 1 : \frac{p}{q}$$

Es sei e der Durchmesser der innern Höhlung. Da der Raum, den die ganze Kugel einnimmt $= z$ angenommen ist, so muß, wenn man den Raum, der in der Kugel leer ist, vom Inhalte der ganzen Kugel abzieht, der Inhalt der Schale übrig bleiben.

Der Kubikinhalt einer Kugel kommt heraus, wenn man den Kubus des Durchmessers mit der Länge der Peripherie multiplizirt, und dann das Produkt durch 6 dividirt (Geom. 65. S.) Folglich der Inhalt des leeren Raumes in der Kugel $= \frac{\pi \cdot e^3}{6}$ und daher

$$z - \frac{\pi \cdot e^3}{6} = \frac{p}{q}$$

$$z = \frac{p}{q} + \frac{\pi \cdot e^3}{6}$$

$$z - \frac{p}{q} = \frac{\pi}{6} \cdot e^3$$

$$\frac{z - \frac{p}{q}}{\frac{\pi}{6}} = e^3$$

$$\left(z - \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{6}{\pi} = e^3$$

66, III, das zweite Exempel.

Wenn das Metall Eisen ist, und $q = 558$ Pf.; $p = 30$ Pf.; so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{30}{558} = \frac{5}{93}$$

$$e^3 = \left(z - \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{6}{\pi} = \left(\frac{3}{7}\text{(66. III. Ex. 2)} - \frac{5}{93}\right) \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$e^3 = \left(\frac{279}{651} - \frac{35}{651}\right) \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$e^3 = \frac{244}{651} \cdot \frac{6}{\pi} = \frac{1464}{651 . \pi} = \frac{488}{217 . \pi}$$

$$\log e^3 = \log \frac{488}{217} - \log \pi$$

$$3 \log e = \log \frac{488}{217} - \log \pi$$

$$\log 488 = 2,6884198$$
$$\log 217 = 2,3364597$$

$$\log \frac{488}{217} = 0,3519601$$
$$\log \pi = 0,4971490 \text{ (66. III. Ex.)}$$

$$3 \log e = 0,8548102 - 1$$

$$3 \log e = 2,8548102 - 3$$

$$\log e = 0,9516034 - 1$$

I) $e = 0,89455$ Fuß

Wenn man den Halbmesser des leeren Raums vom Halbmesser der ganzen Kugel abzieht, so bleibt die Dicke der metallischen Schale übrig. Daher ist die metallische Schale

$$\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}e = \tfrac{1}{2}(d-e)$$

$d = 0,93542$ (66, III, Ex. *H*)

$e = 0,89455$ (I)

$d - e = 0,04087$

$\tfrac{1}{2}(d-e) = 0,020435$ Fuß.

68.

Sezt man ein solches Gefäß, wie 67 ist angezeigt worden, auf verschiedene Flüssigkeiten, und legt in dasselbe Gewichte, so wird das u in 65, welches den eingetauchten Theil des Körpers oder Gefässes anzeigt, bei allen Flüssigkeiten gleich seyn. Die Gewichte, welche man in dieses hole Gefäß thut, wozu man noch jedesmal das Gewicht des Gefässes rechnen muß, verhalten sich bei zweierlei Flüssigkeiten, wie p : P. Die eignen Schweren dieser Flüssigkeiten sollen sich wie m : M verhalten. Das Verhältniß der Gewichte eines Kubikfusses von beiden Materien, soll c : C seyn. Es verhalten sich die Gewichte eines Kubikfusses von beiden Materien, wie die eignen Schweren (30, 1). Daher

I.) $c : C = m : M$.

Den eingetauchten Theil u bekommt man, wenn das Gewicht des Körpers = p durch das Gewicht eines Kubikfusses der Materie, in welche man das Gefäß eintaucht, dividirt wird. Also $u = \frac{p}{c}$ (65) und $u = \frac{P}{C}$. Da nun u = u seyn soll, oder der eingetauchte Theil bei allen gleich groß, so ist

$$\frac{p}{c} = \frac{P}{C} \text{ daher}$$

$$c : p = C : P$$

$$c : C = p : P$$
$$c : C = m : M \quad (I)$$

$$m : M = p : P$$

Es verhalten sich also die eignen Schweren wie die Gewichte, welche man in das hole Gefäß wirft, wozu noch jedesmal das Gewicht des Gefässes gerechnet werden muß.

Die Aerometrie.

17.

Den Druck, welchen die Luft in die Höhe ausübt, kann man sich also vorstellen. In Fig. 2. der Hydrostatik, sei die Röhre mit Luft ausgefüllt, diese wirke eben so, wie Wasser, und beide Schenkel voll Luft sollen im Gleichgewichte seyn. Nimmt man den Schenkel GHKL weg, so wird kein Gleichgewicht mehr bleiben, sondern wenn die Luft in dem Schenkel DEFIKL erhalten werden soll, so muß man bei KL eine Kraft anwenden, die Luft in dem Schenkel DEFIKL zu erhalten, welche dem Drucke der Luft in die Höhe gleich seyn muß.

32.

Beim Wasser mußte die Wassersäule, welche der Luft das Gleichgewicht halten sollte, 32 Fuß hoch seyn; da aber Quecksilber 14 mal schwerer ist als Wasser, so wiegt eine 14 mal kleinere Quecksilbersäule eben so schwer als die Wassersäule; daher kann die Quecksilbersäule 14 mal kleiner als die Wassersäule seyn. Folglich $\frac{32}{14}$ Fuß; dieses durch 12 zu Zollen gemacht, bekommt man $\frac{32 \cdot 12''}{14} = \frac{32 \cdot 6''}{7} = \frac{192''}{7} = 27\frac{3}{7}$ Zoll, wofür man 28″ gewöhnlich annimmt. Daß man nur ohngefähr die Höhe des Quecksilbers 28 Zoll annehmen kann, kommt von der Ungleichheit der Erde. denn in einem Thale ist die Höhe der Atmosphäre größer als auf einem Berge;

folglich muß im ersten Falle die Queckſilberſäule länger seyn als im zweiten.

Von der Luftpumpe.

40.

Der Raum der Glocke nebſt der Röhre zunächſt der Glocke bis H ſei = a; das Stück der Röhre von H bis B nebſt dem Zylinder = b. Wenn man die Glocke auf den Teller der Luftpumpe ſetzt, ſo hat die Luft, welche ſich itzt unter der Glocke und in der Röhre zunächſt der Glocke befindet, die nemliche Dichte, welche die atmoſphäriſche Luft hat; die Menge dieſer erſten Luft, welche ſich noch nach einer Menge von Auspumpungen in dem Raume a befindet, heiße p; die Luft welche noch in dem Raume a iſt, indem der nächſte Zug des Kolbens geſchieht (das iſt, wenn p den Raum a + b einnimmt) ſei = r. Wenn eine Menge Luft in einen doppelt ſo großen Raum ausgedehnt wird, ſo bleibt im einfachen Raume nur halb ſo viel Luft als vorher. Es verhält ſich alſo die Menge Luft im einfachen Raume **vor** der Ausdehnung, zu der Menge **nach** der Ausdehnung in den doppelten Raum, wie der doppelte Raum, zum einfachen. Das iſt, es verhalten ſich die Mengen Luft in einem Raume **vor** und **nach** der Ausdehnung umgekehrt wie die Räume in welche eine gewiſſe Menge Luft ausgedehnt wird. Wenn alſo eine Menge Luft = p, welche den Raum a einnimmt, in den Raum a + b ausgedehnt wird, und die Menge Luft = r in dem Raume a nach der Ausdehnung bleibt, ſo verhält ſich

$$p : r = a + b : a$$

$$r \cdot (a + b) = a \cdot p$$

$$r = \frac{a \cdot p}{a+b}$$

$$r = \frac{a}{a+b} \cdot p$$

Es sei 1) $\frac{a}{a+b} = c$, so ist

2) $r = c \cdot p$

Bei der ersten Auspumpung ist die Luft, welche ausgedehnt wird (die erste Luft) = f, daher p = f, und

3) $r = c \cdot f$ (2)

Wenn der Kolben das erste mal ausgezogen ist, so ist die Luft welche sich in dem Raume a befindet = r. Nun wird der Hahn zugeschlossen, daß also die Luft in dem Raume a beim Zurückdrücken des Kolbens nicht verändert wird. Beim zweiten Auszuge des Kolbens ist die Luft im Raume a (nemlich das p) die Luft r des ersten Zuges; folglich bei der zweiten Auspumpung ist das erste r = p des zweiten Zuges. Daher

4) $p = cf$ (3)

Nun ist wieder von neuem

$$p : r = a + b : a$$

$$r = \frac{a}{a+b} \cdot p$$

$$p = cf \text{ (4)}$$

$$r = c \cdot cf \text{ (1)}$$

---

5) $r = c^2 f$

Beim dritten Zuge wird das r des zweiten Zuges das p des dritten; also das zweite r = p des dritten Zuges. Daher

$$6)\ p = c^2 f\ (5)$$

Nun ist abermal

$$p : r = a + b : a$$

$$r = \frac{a}{a+b} \cdot p$$

$$p = c^2 f\ (6)$$

$$r = c \cdot c^2 f\ (1)$$

$$r = c^3 f$$

So viel neue Auspumpungen noch geschehen, so viel mal muß noch mit c multiplizirt werden. Wenn man also n mal ausgepumpt hat, so ist

$$r = c^n f$$

$$\frac{r}{f} = c^n$$

$$c = \frac{a}{a+b} \quad (1)$$

$$\frac{r}{f} = \left(\frac{a}{a+b}\right)$$

41.

In der letzten Gleichung des 40 hat man

$$\frac{r}{f} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n$$

$$\frac{r}{f} = \frac{a^n}{(a+b)^n}$$

$$\frac{r.(a+b)^n}{f} = a^n$$

$$r.(a+b)^n \quad a^n.f$$

$$(a+b)^n = \frac{a^n.f}{r}$$

$$\frac{(a+b)^n}{a^n} = \frac{f}{r}$$

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \frac{f}{r}$$

Daher ist

$$\log\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \log\frac{f}{r}$$

$$n \log\frac{a+b}{a} = \log\frac{f}{r}$$

41. Exempel.

Es sei $a = b$; so ist $a + b = 2a$; $n = 10$.

Nun ist

$$\log\frac{f}{r} = n \log\frac{a+b}{a}$$

$$\log\frac{f}{r} = 10 \log\frac{2a}{a}$$

$$\log\frac{f}{r} = 10 \log 2$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$10$$

$$\log \frac{f}{r} = 10 \log 2 = 3,0103000$$

$$\frac{f}{r} = 1024$$

$$f : r = 1024 : 1$$

Wenn also die Glocke mit ihrer Röhre zusammen genommen so viel Raum hat, als der Zylinder mit seiner Röhre, so ist nach 10 Auspumpungen die Luft 1024 mal dünner, als beim Anfange.

III. Die Luft zusammenzupressen.

63, II.

Jede Luft wird von einer Luftsäule über ihr gedrückt. Diese Luftsäule, von der Oberfläche unserer Erde an bis ans Ende der Atmosphäre gerechnet, hat das Gewicht einer Quecksilbersäule von 28 Zollen; folglich wird die Luft in der Röhre von einer Kraft k in die Höhe gepreßt, welche dem Gewichte einer 28 Zoll hohen Quecksilbersäule, deren Grundfläche die Weite der Röhre EC ist, gleichgesetzt werden kann.

64, III, IV.

Schüttet man Quecksilber in die offene Röhre bei A, so steigt es in der andern CE in die Höhe, und drückt daselbst die Luft in einen engern Raum. Das Quecksilber wird aber in der Röhre CE nicht die Höhe erreichen, welche es in der Röhre AB hat. Kommt das Quecksilber auf die Höhe Bf = a, so steht es bei F in der andern Röhre.

Nun hält das Quecksilber in der Röhre CE mit einer gleich hohen Quecksilbersäule in der Röhre BA das Gleichgewicht, folglich wird die Luft nicht von der ganzen Quecksilbersäule Bf, sondern nur von dem Ueberschusse über die Höhe FE gepreßt. Die ganze Pressung dieser Luft geschieht also von der Atmosphäre = k und von diesem Ueberschusse der Quecksilbersäule. Dieser Druck ist also $= k + a - EF$, oder für Quecksilber ist er $= (28'' + a - EF)$ hohen Quecksilbersäule, deren Grundfläche die Weite des kürzern Schenkels CE ist.

65.

Wenn der Schenkel $CE = 12''$ war, und

I) $Bf = a = 18''$, so war II) $EF = 4''$, folglich III) $CF = 8''$.
1) $Bf = a = 34''$ — 2) $EF = 6''$ — 3) $CF = 6''$
α) $Bf = a = 93''$ — β) $EF = 9''$ — γ) $CF = 3''$.

Da nun $k = 28$, so ist für den ersten Fall

$$k : k + a - EF = CF : CE \quad (63, v)$$
$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 18 \text{ (I)} - 4 \text{(II)}$$
$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 14$$
$$k : k + a - EF = 2 : 2 + 1$$
$$k : k + a - EF = 2 : 3$$
$$k : k + a - EF = 8 : 12 = CF \text{ (III)} : CE$$

Für den zweiten Fall ist

$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 34 \text{ (1)} - 6 \text{(2)}$$
$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 28$$
$$k : k + a - EF = 28 : 28 . 2$$
$$k : k + a - EF = 1 : 2$$
$$k : k + a - EF = 6 : 12 = CF (3) : CE$$

Für den dritten Fall ist

$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 93\,(\alpha) - 9\,(\beta)$$

$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 84$$

$$k : k + a - EF = 28 : 28 + 28 \,.\, 3$$

$$k : k + a - EF : 1 = 1 + 3 = 1 : 4$$

$$k : k + a - EF = 3 : 12 = CF\,(\gamma) : CE.$$

66.

Da die Luft mit einer 32 Fuß hohen Wassersäule das Gleichgewicht hält, und die Luft 800 mal leichter ist als Wasser (62) (oder das Verhältniß der Dichtigkeit der Luft zu der des Wassers wie 800 : 1 ist), so verhält sich die Höhe der Wassersäule zu der Höhe der Luftsäule, wie die Dichtigkeiten, also wie

$$1 : 800 = 32 : 800 \,.\, 32$$

Wenn daher die Luft in allen Schichten gleich dicht wäre, so würde die Höhe der Atmosphäre 800 . 32 = 25600 Schuhe seyn.

Vom Barometer.

72.

Das Quecksilber stehe bei A im Gefässe, wenn es in der Röhre bei B steht. Nun falle das Quecksilber in der Röhre bis auf D, im Gefässe wird es aber bis C steigen, weil das Quecksilber noch aus der Röhre in das Gefäß kam. Es trägt also die Atmosphäre itzt nur noch die Quecksilbersäule CD. Man fragt wie viel die Quecksilbersäule, welche itzt von der Atmosphäre getragen wird, von der ersten unterschieden sei? Hätte, indem das Quecksilber in der Röhre fiel, das was aus der Röhre in das Gefäß kam, gleich wegfließen können, so daß das Quecksilber im Ge-

fässe nicht hätte steigen müssen, so dürfte man nur die letzte Höhe von der ersten abziehen, den Unterschied zu finden. Würde man nur das Quecksilber noch wegfließen lassen, bis es im Gefässe auf A käm, so würde auch das Quecksilber in der Röhre um CA fallen. Daher ist das Quecksilber um BD + CA gefallen.

73.

Wenn unter der Voraussetzung, welche im Buche angezeigt ist, der Querschnitt, oder die Grundfläche der Röhre = t, und der Querschnitt, oder die Grundfläche des Gefässes von dem zuvor der Querschnitt der Röhre abgezogen ist = v; so muß, wenn das Quecksilber gefallen ist, in dem Gefässe so viel mehr enthalten seyn, als in der Röhre weniger geworden ist; folglich die beiden Stücken, um welches es in der Röhre gefallen, und das, um welches es in dem Gefässe gestiegen ist, gleich seyn; daher

$$BD \,.\, t = AC \,.\, v$$

$$\frac{BD \,.\, t}{v} = AC$$

$$\frac{BD \,.\, t}{v} + BD = BD + AC \quad (72)$$

$$\frac{BD \,.\, t + BD \,.\, v}{v} = BD + AC$$

$$BD \,.\, \frac{(t + v)}{v} = BD + AC$$

Für das wirkliche Fallen in der Röhre.

73. Exempel.

Es verhalten sich der Querschnitt des Gefässes zu dem der Röhre, wie 50 : 1, folglich $v = 50$; $t = 1$, also ist die Senkung des Quecksilbers in der Röhre, oder

$$BD + AC = BD \cdot \frac{(51 + 1)}{50}$$

$$BD + AC = BD \cdot \frac{51}{50}$$

$$BD + AC = BD \cdot 1{,}02$$

Ist $BD = 1''$, so trägt die Atmosphäre itzt 1,02 Zoll weniger Quecksilber, als vorhin.

79, II, III.

Die Menge von Toisen, um welche ein Ort über den andern erhaben ist, sei $= x$, an einer Stelle sei der Barometerstand $= f$, an einen höhern $= y$, so ist $x = 10000.$
$\log \frac{f}{y}$

Der Barometerstand am Meere sei $= f = 28$ pariser Zoll $= 336$ Linien; in Leipzig sei derselbe $= y =$ 27 Zoll 4,6 Linien $= 328{,}6$ Linien.

$$\log f = \log 336 = 2{,}5263393$$
$$\log y = \log 328{,}6 = 2{,}5166676$$

$$\log \frac{f}{y} = 0{,}0096717$$

$$10000 \cdot 0{,}0096717 = 10000 \cdot \frac{96717}{10000000}$$

$= \frac{96717}{1000} = 96{,}717$. Dafür kann man füglich setzen 96,7 Toisen. Diese mit 6 zu Fußen gemacht, giebt 580,2 Fuß für die Höhe von Leipzig über die Oberfläche des Meeres.

Die Hydraulik.

Anwendung der Luft das Wasser zubewegen.

4.

Die Luft treibt das Wasser in den Schenkel AB, sie hat aber nur eine Wassersäule von der Höhe BD zu tragen. Der ganze Druck der Atmosphäre ist dem Drucke einer Wassersäule von 32 Rheinländischen Schuhen gleich, welchen Druck wir = k setzen wollen. Die Gewalt mit welcher das Wasser in die Röhre AB getrieben wird, ist also, da BD noch nicht = k ist, der Gewalt einer Wassersäule k — BD gleich, weil BD einer gleich großen Wassersäule das Gleichgewicht hält.

Auf eben diese Weise ist der Druck, welcher das Wasser in den Schenkel CB treibt, dem Drucke einer Wassersäule von k – BE Schuhen gleich. Weil BE größer als BD ist, so hält die Säule BE mit einem größern Stücke Wasser als BD das Gleichgewicht; folglich bleibt beim Schenkel BA ein größers Gewicht, welches das Wasser in diesen Schenkel preßt, übrig, als beim andern Schenkel BC. Da beide Wirkungen einander entgegengesetzt sind, so hebt der größere Druck den kleinern auf, und der größere behält noch Kraft übrig, weswegen das Wasser bei C auslaufen muß. Da nun das Wasser im Schenkel AB immer wieder ersetzt wird, weil die Luft beständig neues Wasser in den Schenkel drückt, so muß das Wasser so lange laufen, so lange der Schenkel AB ins Wasser reicht, oder bis BD = BE wird.

Die Optik.

3.

Es sei die Ebene BCDE = M; bcde = m, ein Theil der lezten Ebene sei = b = BCDE = M, so wird die Menge Licht, welche auf diesen Theil b fällt, sich zu der Menge Licht, welche auf die Ebene m selbst fällt, verhalten, wie b : m und weil b = M, wie M : m. Es verhalten sich aber diese Ebenen in verschiedenen Entfernungen vom leuchtenden Punkte, wenn gleichviel Licht auf sie fällt, wie die Quadrate der Entfernungen vom leuchtenden Punkte (2). Die Entfernung der Ebene M von A sei = Z, die der andern = z, so ist

$$1)\ M : m = Z^2 : z^2$$

Die Menge Licht, welche auf M fällt, sei = L, so viel fällt auch auf m; die Menge Licht, welche auf b in der Entfernung der Ebene m fällt, sei = λ, so ist

$$\lambda : L = b : m$$
$$b = M$$
$$\lambda : L = M : m$$
$$Z^2 : z^2 = M : m \quad (1)$$
$$2)\ \lambda : L = Z^2 : z^2$$

6, I.

Im Dreiecke KKI der Fig. 2. sei K ein rechter Winkel, so ist

$$r : \sin H = HI : IK$$

$$1)\ IK = \frac{\sin H \cdot HI}{r}$$

$$\sin H = \sin 1'; r = 1$$

$$IK = 0,0002909 \cdot HI$$

Aus 1) ist

$$HI = \frac{r}{\sin H} \cdot IK$$

$$HI = \frac{r}{\sin 1'} \cdot IK$$

$$\log r = 10,0000000$$
$$\log \sin 1' = 6,4637261$$

$$3,5362738$$

$$\frac{r}{\sin 1'} = 3438$$

Daher $HI = 3438 \cdot IK$

Der Halbmesser durch den sin 1′ dividirt, ist noch nicht 3438. Man setze dafür 3500. Wenn also HI > 3500. IK ist, so ist der Winkel I noch nicht um 1′ von einem Rechten unterschieden; man kann daher füglich den Winkel I, wenn nicht große Schärfe gefodert wird, für einen Rechten annehmen; folglich ist alsdann HI und HK parallel.

6, II.

Wenn $H = 1''$, so ist

$$\frac{r : \sin 1'' = HI : IK}{HI = \frac{r}{\sin 1''} . IK}$$

$$\log r = 10{,}0000000$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}6855749$$
$$\overline{\quad 5{,}3144250 \quad}$$

$$\frac{r}{\sin 1''} = 206260 +$$

Der Quotient des Radius durch den $\sin 1''$ dividirt, fällt also zwischen 206260 und 206270. Wenn daher $HI > 206270 . IK$ ist, so ist der Winkel I noch nicht um eine Sekunde kleiner, als ein rechter Winkel, und daher noch eher für einen Rechten zu halten, als in 6, I.

6, IV.

Wenn man eine Linie durch P mit QM parallel zieht, und sie PR heißt, so ist in den beiden ähnlichen Dreiecken NQM und NPR

$$NQ : NP = NM : NR$$
$$NR = NM - PO \text{ (p.f.)}$$
$$\overline{NQ : NP = NM : NM - PO}$$

Wenn daher NP in Vergleichung mit NQ sehr klein ist, so wird beinahe $PO = NM$, folglich nähern sich die Linien NP und MO nicht merklich, oder sie sind fast parallel.

7. 8.

Man nehme Fig. VII, der Erläut. wo l und L zwei leuchtende Punkte sind, B und C zwei gleich große Ebenen,

welche in verschiedenen Entfernungen von den leuchtenden Punkten stehen. Vom Punkte L bekomme die Ebene B das Licht M, von l das Licht m. Das Licht welches auf B von beiden leuchtenden Punkten fällt, ist also $= M + m$. Die Erleuchtungen zweier gleich großen Ebenen in verschiedenen Entfernungen vom leuchtenden Punkte, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom leuchtenden Punkte (3, 2)

$$AC^2 : AB^2 = M : \frac{AB^2}{M^2} . M$$

Dieses Licht bekommt C vom Punkte L. Für l ist

$$AC^2 : AB^2 = m : \frac{AB^2}{AC^2} . m$$

welches Licht die Ebene C von l bekommt. Die Ebene C bekommt zusammen genommen Licht von beiden Punkten L und l

$$\frac{AB^2}{AB^2} . M + \frac{AB^2}{AC^2} . m = \frac{AB^2}{AC^2} . (M + m)$$

Die Erleuchtungen der beiden Ebenen B und C verhalten sich daher wie

$$M + m : \frac{AB^2}{AC^2} . (M + m)$$

$$\overline{(M + m) . AC^2 : (M + m) . AB^2}$$

$$\overline{AC^2 : AB^2}$$

Also wieder umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen.

9.

Es werde E von zwei gleich starken und gleich weit von E entfernten Lichtern erleuchtet, deren jedes bei E die Erleuchtung l hervorbringt, so ist 2l die ganze Erleuchtung von beiden Lichtern in E. Nun sei ferner AE = EC = a; EB = x, so ist AB = a − x (p. f.) BC = a + x (p. f.) Es verhält sich die Erleuchtung von A in E zu der in B, verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom leuchtenden Punkte A, (7) nemlich

$$AB^2 : AE^2 = l : \frac{AE^2 . l}{AB^2}$$

$$1)\ (a-x)^2 : a^2 = l : \frac{a^2 l}{(a-x)^2}$$

Eben so findet man die Erleuchtung des Punktes B von C her. Es verhält sich abermals

$$BC^2 : EC^2 = l : \frac{EC^2 . l}{BC^2}$$

$$2)\ (a+x)^2 : a^2 = l : \frac{a^2 l}{(a+x)^2}$$

Die ganze Erleuchtung des Punktes B also ist von beiden leuchtenden Punkten A und C auch die Summe dieser beiden Erleuchtungen 1) 2); sie ist, wenn man sie I nennt

$$I = \frac{a^2 l}{(a-x)^2} + \frac{a^2 l}{(a+x)^2}$$

$$I = a^2 l . \left(\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2}\right)$$

$$1 = a^2 l\left(\frac{(a+x)^2+(a-x)^2}{(a-x)^2\,.\,(a+x)^2}\right)$$

$$1 = a^2 l\left(\frac{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2}{(a-x)^2\,.\,(a+x)^2}\right)$$

$$1 = a^2 l\left(\frac{2a^2+2x^2}{(a-x)^2\,.\,(a+x)^2}\right)$$

$$1 = a^2 l\left(\frac{2\,.\,(a^2+x^2)}{(a-x)^2\,.\,(a+x)^2}\right)$$

$$1 = 2a^2 l\left(\frac{a^2+x^2}{(a-x)^2\,.\,(a+x)^2}\right)$$

$$1 = 2a^2 l\left(\frac{a^2+x^2}{[(a-x)\,.\,(a+x)]^2}\right)$$

$$1 = 2a^2 l\left(\frac{a^2+x^2}{(a^2-x^2)^2}\right)$$ (Ar. II, 5, III. Ex.)

$$1 = 2a^2 l\left(\frac{a^2+x^2}{(a^2-x^2)\,.\,(a^2-x^2)}\right)$$

$$1 = 2 l\left(\frac{a^2\,.\,(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)\,.\,(a^2-x^2)}\right)$$

Es ist nun hier $a^2 - x^2$ kleiner als a^2, weil von diesem etwas abgezogen ist, und noch mehr ist $a^2 - x^2$ kleiner als $a^2 + x^2$, folglich muß $a^2\,.\,(a^2 + x^2)$ ein größeres Produkt geben als $(a^2 - x^2)\,.\,(a^2 - x^2)$, weil jeder der ersten Faktoren größer ist, als jeder der letztern; daher muß $\frac{a^2\,.\,(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)\,.\,(a^2+x^2)}$ größer als 1 seyn; daher wird

$2\,l.\left(\frac{a^2(a^2+x^2)}{(a^2-x^2).(a^2-x^2)}\right)$ größer als $2\,l$. Dieses zeigt, daß die Erleuchtung in jedem Punkte zwischen den beiden Lichtern größer sei, als in der Mitte bei E.

10.

AB = a; AC = AF = p; BD = BG = CN = q; daher AN = AC — CN = p — q. In dem rechtwinklichen Dreiecke ANC, wo AN und AB bekannt sind, hat man

$$AB : AN = r : \sin ABN$$

$$a : p - q = r : \sin ABN$$

$$\sin ABN = \frac{(p-q).r}{a}$$

Der Winkel ABN = E, weil die Dreiecke ANC und ACE ähnlich sind; folglich $\sin E = \frac{(p-q).r}{a}$

Die geometrische Verzeichnung zu verfertigen, nehme man in Fig. VIII, der Erl. die Distanz der Mittelpunkte beider Kugeln AB, beschreibe darüber einen halben Kreis AMB; in diesen trage man den Unterschied der beiden Halbmesser AN als Sehne, so bekommt man die Lage der Linie ANC; an diese setze man in gerader Linie den Halbmesser der kleinern Kugel, welches den Halbmesser der großen Kugel giebt. Mit diesem Halbmesser ziehe man den Halbmesser der kleinen Kugel BD parallel, so kann man durch C und D die Linie CDE ziehen.

11.

$$CAF = 2\,R - CAH$$
$$CAH = GBD \text{ (Geom. 12. S. 2. Z.)}$$

$$CAF = 2\,R - GBD$$

In dem Dreiecke ANB ist der genannte Winkel ein Rechter, folglich machen die beiden übrigen NAB = CAB und ABN auch einen rechten Winkel aus, weil alle drei zusammen 2 R gleich sind; daher ist

$$CAF = CAB = R - ABN$$

12, II.

$$BE = AE - AB = \frac{pa}{p-q}\ (12, I) - a$$

$$BE = \frac{pa - a\,.\,(p-q)}{p-q}$$

$$BE = \frac{pa - pa - aq}{p-q}$$

$$1)\ BE = \frac{aq}{p-q}$$

Wenn man also über BE ebenfalls einen halben Kreis beschreibt, und in ihn BD = q als Sehne trägt, so bekommt man die Lage der Linie BD.

13, I.

Man sehe die Fig. IX der Erläut. Es ist daselbst AB = AE + EB = a, AF = AC = p; BG = BD = q. In den beiden ähnlichen Dreiecken ACE und DBE ist

$$AE : EB = AC : BD$$
$$AC = p ; BD = q$$

I) $AE : EB = p : q$

$$AE : EB + AE = p : q + p \quad (\text{Ar. V, 34, III})$$
$$EB + AE = a$$

$$AE : a = p : p + q$$

$$AE = \frac{a\,p}{p+q}$$

EB zu finden ist aus I)

$AE : EB = p : q$ daher auch

$$AE + EB : EB = p + q : q$$
$$AE + EB = a$$

$$a : EB = p + q : q$$

$$EB = \frac{a\,q}{p+q}$$

Ferner ist

$$BE : BD = r : \sin E$$

$$BE = \frac{a\,q}{p+q} ; BD = q$$

$$\frac{a\,q}{p+q} : q = r : \sin E$$

$$\sin E = \frac{q\,r}{\frac{a\,q}{p+q}}$$

$$\sin E = q\,r \cdot \frac{p+q}{a\,q}$$

$$\sin E = \frac{\frac{q\,r\,.\,(p+q)}{a\,q}}{}$$

$$\sin E = \frac{r\,.\,(p+q)}{a}$$

13, II.

In der Figur 4 giebt es ein Paar zu einander gehörige Berührungspunkte C und C über AB, und verzeichnet man die fehlenden halben Kreise, so bekommt man eben so ein Paar Berührungspunkte unter AB. Eben dieses findet in Fig. IX der Erläut. statt. C und D sind ein Paar zu einander gehörige Berührungspunkte einer unter, der andere über AB. Ergänzt man die Halbkreise, so bekommt man wiederum zwei Berührungspunkte, einen über, den andern unter AB. Alle Antworten auf diese Fragen unterscheiden sich in nichts von einander, als durch die Bestimmung der Lagen der Berührungspunkte.

14. Exempel.

Es sei $p = 100$; $q = 1$; $a = 22000$, so hat man für den Winkel ABN aus 10

$$\sin ABN = \frac{(p-q)\,.\,r}{a} = \sin E$$

$$\sin ABN = \frac{(100-1)\,r}{22000}$$

$$\sin ABN = \frac{99\,.\,r}{22000}$$

$$\log 99 = 1{,}9956352$$
$$\log r = 10{,}0000000$$

$$11{,}9956352$$

$$\log 22000 = 4,3424227$$
$$\log \sin ABN = 7,6532125$$
$$ABN = 15'$$

Die noch dazu gehörigen Sekunden zu finden, hat man

$$\log \sin 16' = 7,6678445$$
$$\log \sin 15' = 7,6398160$$
$$280285$$
$$\log \sin ABN = 7,6532125$$
$$\log \sin 15' = 7,6398160$$
$$133965$$
$$280285 : 133965 = 60'' : 28''.$$
$$60$$

```
280285 | 8037900 | 28"
          560570
         -------
         2432200
         2242280
         -------
          189920
```

ABN = 15′ 28″. Oder achtet man die Sekunden nicht, so ist er blos 15′.

16, Exempel.

Die Länge des Schattens zu finden ist nur seine Axe BE zu wissen nöthig. Es ist aber

$$BE = \frac{a\,q}{p - q} \quad (12, II, I)$$

Man nehme nun aus dem Exempel in 14 für die Buchstaben die angenommenen Zahlen, so ist

$$BE = \frac{22000 \cdot 1}{100 - 1}$$

$$BE = \frac{22000}{99}$$

$$BE = 222 + \frac{22}{99}$$

$$BE = 222 + \frac{2}{9}$$

18.

Aus dem Winkel V der Fig. 5. den ein Lichtstrahl, welcher an dem einen Ende eines Gegenstandes S wegfährt, mit dem Horizonte macht, und der Länge des Gegenstandes, findet man die Länge des Schattens. Denn es ist in dem rechtwinklichen Dreiecke STV nach Trig. 6. S.

$$\text{tang } V : r = ST : TV$$

$$TV = \frac{r \cdot ST}{\text{tang } V}$$

19, I.

Die beiden Winkel LSl und VSv sind als Vertikalwinkel gleich; wenn also L der Sonne oberer und l derselben unterer Rand ist, so bestimmt dieser Winkel LSl der Sonne scheinbaren Durchmesser. Dieser Winkel ist ohngefähr 32 Minuten. Aus diesem Winkel LSl, dem Winkel SVT und TS kann man die Länge des Halbschattens Vv bestimmen. Es ist nemlich

$$v + VSv + SVv = 2R$$
$$SVT + SVv = 2R$$
$$v + VSv + SVv = SVT + SVv$$
$$v + VSv = SVT$$
$$v = SVT - VSv$$

Man hat also in dem rechtwinklichen Dreiecke STv die Seite ST und den Winkel v, woraus man TV finden kann.

$$\tang v : r = ST : TV$$
$$TV = \frac{ST \cdot r}{\tang v}$$

19, II.

Setzt man den Radius = 1, so ist

$$ST : Tv = 1 : \tang TSv$$
$$1)\ \tang TSv = \frac{Tv}{ST}$$

und $ST : TV = 1 : \tang TSV$

$$2)\ \tang TSV = \frac{TV}{ST}$$

Der Unterschied zweier Tangenten von zwei kleinen Winkeln ist nicht so beträchtlich, als der Unterschied der Tangenten von großen Winkeln, obgleich die großen Winkel nicht mehr von einander unterschieden sind, als die kleinen. Hiervon kann man sich leicht aus den Tafeln überzeugen. Z. B. $\tang 2^\circ - \tang 1^\circ 28' = 93170$, und $\tang 45^\circ - \tang 44^\circ 28' = 184457$. Der letzte Unterschied ist viel größer als der erste, obgleich beide Paare

von Winkeln gleich viel, nemlich um 32′ unterschieden sind. Vv ist der Halbschatten, und zugleich der Unterschied der beiden Tangenten TSV und TSv, wenn ST der Radius ist. Kommt die Sonne niedriger, so wird TSV größer und v kleiner, folglich der Unterschied der Tangenten noch beträchtlicher. Der Halbschatten wird also immer größer, je niedriger die Sonne steht, und immer kleiner, je höher sie steht. Der Unterschied dieser beiden Tangenten ist

$$\text{tang } TSv - \text{tang } TSV = \frac{Tv}{ST} - \frac{TV}{ST} = \frac{Tv - TV}{ST}$$

$= \frac{Vv}{ST}$. Dieser Quotient wird immer kleiner, wenn TSv und TSV abnehmen.

19, III.

$$TSv = TSV + VSv$$
$$TSV = \alpha;\ VSv = \beta$$

$$TSv = \alpha + \beta$$

$$\text{tang } TSv = \text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \,.\, \text{tang } \beta}$$ (Trig. 19. S. 3. Z.

$$\text{tang } TSv - \text{tang } STV = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \,.\, \text{tang } \beta} - \text{tang } \alpha$$

$$\text{tang } TSv - \text{tang } TSV = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta - \text{tang } \alpha\ (1 - \text{tang } \alpha \,.\, \text{tang } \beta)}{1 - \alpha \,.\, \text{tang } \beta}$$

$$\text{tang } TSv - \text{tang } TSV = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta - \text{tang } \alpha + \text{tang } \alpha^2 \,.\, \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \,.\, \text{tang } \beta}$$

$$\text{tang TSv} - \text{tang TSV} = \frac{\text{tang } \beta + \text{tang } \alpha^2 . \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha . \text{tang } \beta}$$

$$\text{tang TSv} - \text{tang TSV} = \frac{(1 + \text{tang } \alpha^2) . \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha . \text{tang } \beta}$$

$r (1 - \text{tang } \alpha^2) = \text{sec } \alpha$ (Trig. 4 Erkl. 5. Z.)
Daher $1 + \text{tang } \alpha^2 = \text{sec } \alpha^2$

$$A) \ \text{tang TSv} - \text{tang TSV} = \frac{\text{sec } \alpha^2 . \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha . \text{tang } \beta}$$

Wächst α, so wächst die Sekante und Tangente. Indem also α wächst, wird der Zähler im Werthe des Unterschieds der beiden Tagenten von TSv und TSV immer größer, und der Nenner kleiner, da von 1 immer etwas grössere abgezogen wird. Es muß daher der Quotient größer werden. Auf β ist nicht zu sehen, da es unverändert bleibt.

19, IV.

Wird $\alpha = 90^\circ - \beta$, so ist $\alpha + \beta = 90^\circ$, folglich $\text{sec } \alpha = \text{cosec } \beta$, also der Zähler im Werthe des Unterschieds der Tangenten $= \text{tang } \beta . \text{cosec } \beta^2$. Weil auch alsdann $\text{tang } \alpha = \text{cot } \beta$, so wird aus dem Nenner $1 - \text{cot } \beta . \text{tang } \beta$. Es ist aber in Trig. 5 Erkl. 2. Z. $\text{cot } \beta = \frac{r^2}{\text{tang} \beta}$ oder daraus

$$B) \ \text{cot } \beta . \text{tang } \beta = r^2 = 1.$$

Der Nenner ist also $1 - 1 = 0$, und da nun eine endliche Größe durch 0 dividirt wird, so wird der Quotient unendlich (Trig. 4 Erkl. 4. Z.); folglich der Unterschied der Tangenten, das ist Vv, unendlich.

72, V.

Wenn TSV = 90° — VSv wird, so muß SVT (welcher Winkel die Höhe des obern Sonnenrandes ist) dem Winkel LSl = VSv, welchen der scheinbare Durchmesser der Sonne in unserm Auge macht, gleich seyn. Denn wenn TSV + VSv = 90°, so ist Sv parallel mit TV, also SVT = VSv. Wenn also Sv die TV nicht schneidet, so steht der untere Rand der Sonne im Horizonte des Punktes S, und aus eben der Ursache ist auch Vv unendlich.

19, VI.

Auch wird der Werth des Unterschieds....

Der Werth des Unterschieds der Tangenten ist = $\frac{\text{tang}\,\beta\,.\,\text{sec}\,\alpha^2}{1 - \text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\beta}$ (III, *A*) Wenn tang α = cot β war, so wurde tang α . tang β = 1 (IIII, *B́*); also muß, wenn tang α > cot β, tang α . tang β > 1 seyn; daher 1 — tang α . tang β etwas verneintes geben. Es wird also nunmehr etwas bejahtes durch etwas verneintes dividirt, welches einen verneinten Quotienten giebt. Der Werth des Unterschieds der Tangenten, das ist Vv ist also verneint.

20.

Wenn zwei von den drei Stücken TV; ST; V gegeben sind, so findet man das dritte; weil immer

$TV : ST = 1 : \tan V$ (Trig. 4. S.)

so ist $\tan V = \frac{ST}{TV}$

$TV = \frac{ST}{\tan V}$

$ST = \frac{\tan V}{TV}$

24.

In dem rechtwinklichen Dreiecke IKH ist

$KH : IK = 1 : \tan h$

$\tan h = \frac{IK}{KH}$

und ist I = h, so hat man

$KH : IK = 1 : \cot h$

$\cot h = \frac{IK}{KH}$

32.

Die Tangente der scheinbaren Größe des Gegenstandes MN zu finden, ist

$MQ : MN = r : \tan Q$

1) $\tan Q = \frac{MN \cdot r}{MQ} = \frac{MN}{MQ}$ für $r = 1$

So ist auch für den Gegenstand ST in Fig 5.

$TV : ST = r : \tan V$

2) $\tan V = \frac{ST \cdot r}{TV} = \frac{ST}{TV}$ für $r = 1$

Es verhalten sich daher die Tangenten der Gegenstände in Fig 6 und 5, wie

$$\text{tang } Q : \text{tang } V = \frac{MN}{MQ} (32, 1) : \frac{ST}{TV} (32, 2)$$

---

1) $\text{tang } Q : \text{tang } V = MN . TV : ST . MQ$

34.

Sind die Gegenstände gleich, also ST = MN, so wird aus 33, 1)

$$\text{tang } Q : \text{tang } V = MN : ST$$

Also verhalten sich die Tangenten der scheinbaren Grössen, verkehrt wie die Gegenstände.

Sollen die Gegenstände einerlei scheinbare Größen haben, so müssen die Tangenten der scheinbaren Größen gleich seyn; daher wird aus 32, 1)

$$\text{tang } Q : \text{tang } V = MN . TV : ST . MQ$$

$$1 : 1 = MN . TV : ST . MQ$$

$$MN . TV = ST . MQ$$

$$MN : ST = MQ : TV$$

Es müssen sich also die Gegenstände wie die Entfernungen zu einander verhalten.

35.

Bei kleinen Winkeln verhalten sich die Tangenten beinah wie die Winkel selbst; folglich kann man auch hier sagen

$$Q : V = \text{tang } Q : \text{tang } V = MN . TV : ST . MQ \ (33, 1)$$

36.

Sind von den drei Stücken MN; MQ; Q in Fig. 6, nur zwei gegeben, so findet man allezeit das dritte in dem rechtwinklichen Dreiecke MNQ. Aus MN; MQ findet man Q

$$MQ : MN = r : \text{tang } Q$$

$$\text{tang } Q = \frac{MN \cdot r}{MQ}$$

Aus MN; Q wird MQ gefunden

$$\text{tang } Q : r = MN : MQ$$

$$MQ = \frac{MN \cdot r}{\text{tang } Q}$$

Endlich aus MQ; Q hat man MN

$$r : \text{tang } Q = MQ : MN$$

$$MN = \frac{MQ \cdot \text{tang } Q}{r}$$

36, IV.

Es sei in der Fig. VII, * der Erläut. MN der Gegenstand, so ist, den Radius 1 gesetzt,

$$QN : RN = 1 : \sin NQR$$

Man nehme QN = OM = c; NR = RM = $\frac{1}{2}$ f; und RQN = RQM = $\frac{1}{2}$ Q an, so ist

$$c : \tfrac{1}{2} f = 1 : \sin \tfrac{1}{2} Q$$

$$A) \sin \tfrac{1}{2} Q = \frac{\frac{1}{2} f}{c}$$

36, V.

Weil bei einem kleinen Winkel der Bogen, welcher den Winkel mißt, vom Sinus nicht unterschieden ist, man also einen für den andern setzen kann, so kann man für

$$\sin \tfrac{1}{2} Q = \frac{\tfrac{1}{2} f}{c} \text{ (36, IV, } A\text{) setzen}$$

$$\tfrac{1}{2} Q = \frac{\tfrac{1}{2} f}{c}$$

$$Q = \frac{f}{c}$$

36, VIII.

Es sei NM der Gegenstand 86 Fuß = f lang, und vom Auge Q um 34080 Fuß = c weit entfernt (Fig. VII, * der Erläut.), so daß NQ = MN = 34080 Fuß = c lang ist, wieviel wird seine scheinbare Größe betragen? das ist, wieviel Schuhe wird der Gegenstand, wenn man ihn aus Q sieht, Fusse zu haben scheinen? und wie groß wird also der Winkel Q, unter welchem man ihn sieht, seyn?

$$m = \frac{f}{e \cdot c} \text{ (36, VII) ist die Formel, nach welcher}$$

die Rechnung angestellt wird.

In den gewöhnlichen Tafeln, in welchen die Logarithmen nur für die Sinus der einzelnen Minuten berechnet sind, ist log sin 1′ = 6,4637261, und zwar für den Halbmesser 10, 000, 000, 000, wovon der Logarithme 10 ist. Den Logarithmen des Sinus für diesen Halbmesser kann man leicht in den log sin 1′ für den Halbmesser 1 verwan-

deln, wenn man vom Logarithmen des Sinus in den Tafeln 10 abzieht, (Trig. Vorerin. 6 Vor. 19 S.) also

$$\log \sin 1' = 6{,}4637261 \text{ in den Tafeln}$$
$$10$$

$$\log \sin 1' = 0{,}4637261 - 4 \text{ für den Halbm. } 1.$$

Wenn man nun annimmt, daß sich bei kleinen Winkeln die Sinus eben so verhalten, wie die Bogen, zu denen sie gehören, so kann man den Logarithmen des sin 1″ finden.

$$60'' : 1'' = \sin 60'' : \sin 1''$$

$$\log \sin 1'' = \log \sin 60'' - \log 60$$
$$\log \sin 60'' = 0{,}4637261 - 4$$
$$\log 60 = 1{,}7781513$$

$$\log \sin 1'' = 0{,}6855748 - 6$$

Im Buche ist die letzte Ziffer 9, welches aber daher kommt, daß der log 60 etwas zu groß ist; er ist genauer 1,77815125, wofür in den gewöhnlichen Tafeln die siebente Dezimalstelle 3 ist; sie hätte wohl mit eben dem Rechte 2 seyn können.

Die Voraussetzung

$$10'' : 1'' = \sin 10'' : \sin 1''$$

ist schon richtiger

$$\log \sin 10'' = 0{,}6855749 - 5 \text{ für den Halbm. } 1$$
$$\log 10 = 1{,}0000000$$

$$C)\ \log \sin 1'' = 0{,}6855749 - 6 = \log 1''$$

weil man annimmt, daß hier Sinus und Bogen nicht unterschieden sind.

Nun wollen wir die Rechnung selbst vornehmen.

$$\log c = \log 34080 = 4,5324996$$
$$\log e = \log 1'' \quad = 0,6855749 - 6 \ (C)$$

$$0,2180745 - 1$$
$$\log f = \log 86 = 1,9344985$$

$$\log m = 2,7164240$$

$m = 520,50$ Sekunden durch 60 zu Minuten gemacht, kommen 8 Minuten 40, 5 Sekunden.

38, III.

$$OQ : OP = r : \text{tang } Q$$

1) $\text{tang } Q = \dfrac{OP}{OQ}$

$$OQ = 10312 . OP$$

$$\text{tang } Q = \frac{OP}{10312} . OP = \frac{1}{10312} = \frac{r}{10312}$$

$$\log r = 10,0000000$$
$$\log 10312 = 4,0133429$$

$$\log \text{tang } Q = 5,9866571$$

Dieser Logarithme fällt zwischen die Logarithmen der Tangenten von 20 und 21 Sekunden: den log tang $20'' = 5,9866049$ und log tang $21'' = 6,0077942$; daher der doppelte Winkel zwischen 40 und 42 Sekunden fällt. Im Buche ist es wahrscheinlich ein Versehen.

38, VII.

Wenn OP = $\frac{1}{2}$; und OQ = 2000, so ist tang Q

$$= \frac{OP}{OQ} \text{ (38, III, I) } = \frac{\frac{1}{2}}{2000} = \frac{1}{2.2000} = \frac{1}{4000}$$

$$= \frac{r}{4000}$$

$$\begin{array}{l} \log r = 10,0000000 \\ \log 4000 = 3,6020600 \\ \hline \log \text{tang } Q = 6,3979400 \end{array}$$

Q = 51″, daher ist der ganze Sehwinkel = 2.51″ = 1′ 42″.

38, IX

$$\begin{array}{l} 1 : \cot Q = OP : OQ \\ \hline OQ = OP \,.\, \cot Q \end{array}$$

Wenn nun OP die Höhe des halben Menschen ist = 2,5 Fuß, so muß auch Q = 2 Minuten seyn, folglich

$$\begin{array}{r} \log \cot 2' = 13,2352438 \\ \log 2,5 = 0,3979400 \\ \hline 13,6331838 \\ 10,0000000 \\ \hline \log OQ = 3,6331838 \end{array}$$

OQ = 4297 Fuß.

45.

Der Weg EG des ersten Körpers von E erscheint unter dem Winkel EOG, dessen Tangente man findet, wenn man sagt

$$EO : EG = 1 : \text{tang } EOG$$

$$\text{tang } EOG = \frac{EG}{EO}$$

Dieses ist also die scheinbare Weite, welche der Körper gegangen ist, oder seine scheinbare Geschwindigkeit.

Des zweiten Körpers Winkel der scheinbaren Bewegung, oder die Tangente der scheinbaren Geschwindigkeit des zweiten Körpers, findet man

$$BO : BC = 1 : \text{tang } BOC$$

$$\text{tang } BOC = \frac{BC}{BO}$$

Es verhalten sich also die Tangenten der scheinbaren Geschwindigkeiten des Körpers E und B wie $\frac{EG}{EO} : \frac{BC}{BO}$.

Ist aber $\frac{EG}{EO} = \frac{BC}{BO}$, so sind die scheinbaren Geschwindigkeiten gleich, und alsdann ist

$$EG : EO = BC : BO;$$

daher sind die Dreiecke EOG und BOC ähnlich, folglich auch OCG eine gerade Linie.

Sind aber die wahren Geschwindigkeiten gleich, d. i. $EG = BC$, so bekommt man alsdann aus

$$\text{tang EOG} : \text{tang BOC} = \frac{EG}{EO} : \frac{BC}{BO}$$

$$\text{tang EOG} : \text{tang BOC} = EG \,.\, BO : BC \,.\, EO$$
$$EG = BC$$

$$\text{tang EOG} : \text{tang BOC} = BO : EO$$

die Tangenten der scheinbaren Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Entfernungen, welche die Körper zu Anfange von O hatten.

Die Katoptrik.

9.

Diese Ebene MN kann man sich von einem Kartenblatte verfertigen, auf welches man die Linien BC und CA zieht, alsdann die Steckenadel bei B einsteckt. Damit sie nicht vom Auge unmittelbar gesehen wird, so kann man sie durch ein Stück Papier verdecken, welches geschieht, wenn man zwischen DC, und BC ohngefähr parallel mit BC, einen Einschnitt macht, und dadurch ein Stückchen Papier steckt.

12.

Wenn DC auf den Spiegel PO senkrecht ist, so müssen DCO und DCM rechte Winkel seyn. Da also der Inklinationswinkel dem Reflexionswinkel gleich ist, so muß auch BCD = ACD seyn, oder

$$\begin{array}{l} DCO = DCM = R \\ BCO = ACM \\ \hline BCD = ACD \end{array}$$

Vom ebenen Spiegel.

20.

Es ist der Inklinationsw. ACM = QCB dem Reflexionsw.
QCB = MCa als Vertikalw.

$$\begin{array}{l} ACM = MCa \\ AMC = aMC = R \\ MC = MC \\ \hline \triangle\, AMC = \triangle\, MCa \\ \hline MA = Ma \end{array}$$

22.

Man kann für alle Strahlen, welche aus A auf den Spiegel fallen, eben so beweisen, daß die rückwärts verlängerten reflecktirten Strahlen durch a gehen, wie man für den Strahl AC es bewieß.

30.

In den beiden ähnlichen Dreiecken fgO und DEO sind

$$fg : DE = fO : DO$$

und in den Dreiecken fFO und fMD ist ferner

$$fF : MF = fO : DO$$

$$fg : DE = fF : MF$$
$$fg = FG$$

$$FG : DE = fF : MF$$
$$fF : MF = 2 : 1$$

$$FG : DE = 2 : 1$$

Von hohlen Kugelspiegeln.

32, IV.

Wenn OQ auf LM senkrecht gefällt ist, so verhält sich in dem rechtwinklichen Dreiecke LOQ

$$1 : \cos\lambda = LO : LQ$$

$$LQ = \cos\lambda \, . \, LO = \tfrac{1}{2} a$$

wegen der senkrechten Fällung der Linie OQ auf LM

Aus diesem $\cos\lambda \, . \, LO = \tfrac{1}{2} a$ findet man

$$LO = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos\lambda}$$

A) $$LO = \frac{a}{2\cos\lambda}$$

$$LO = \tfrac{1}{2}a \,.\, \frac{1}{\cos\lambda}$$

$$\frac{1}{\cos\lambda} \; \sec\lambda$$ (Trig. 4 Erkl. 5. Z.)

$$LO = \tfrac{1}{2}a \,.\, \sec\lambda$$

32, V.

Wenn man $LV = \frac{1}{2}a$ macht, so ist

$$VO = LO - \tfrac{1}{2}a$$

$$LO = \frac{a}{2\cos\lambda}$$ (32, IV, A)

$$VO = \frac{a}{2\cos\lambda} - \tfrac{1}{2}a$$

$$VO = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos\lambda} - \tfrac{1}{2}a$$

$$VO = \tfrac{1}{2}a \,.\left(\frac{1}{\cos\lambda} - 1\right)$$

Z) $$VO = \tfrac{1}{2}a \,.\left(\frac{1 - \cos\lambda}{\cos\lambda}\right)$$

In Trig. 19. S. 5. Z. steht $\cos 2\phi = 1 - 2 \sin\phi^2$; man setze hier $\phi = \frac{1}{2}\lambda$, so wird $2\phi = \lambda$, und

$B)\ \cos\lambda = \cos 2\phi$

$\sin\phi^2 = \sin\tfrac{1}{2}\lambda^2$, folglich

$C)\ 2\sin\phi^2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2$

Nun setze man in der Formel, welche aus Trig. 19. S. 5. Z. genommen ist, die gefundenen Größen,

$$\cos 2\phi = 1 - 2\sin\phi^2$$
$$\cos 2\phi = \cos\lambda\ (B);\ 2\sin\phi^2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2\ (C)$$

$$D)\ \cos\lambda = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

Statt des $\cos\lambda$ setze man im Nenner in der Formel Z) den hier gefundenen Werth

$$Vo = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1-2\cos\lambda}{\cos\lambda}\right)$$
$$\cos\lambda = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2\ (D)$$

$$VO = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1-(1-2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)}{\cos\lambda}\right)$$

$$VO = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1-1+2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2}{\cos\lambda}\right)$$

$$VO = \tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{a\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2}{\cos\lambda}$$

$$E)\ VO = \frac{a\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2}{\cos\lambda}$$

33.

Wenn λ wächst, so nimmt $\cos\lambda$ ab, hingegen $\sin\tfrac{1}{2}\lambda$ wird größer, daher auch $\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2$ größer. Nun muß,

wenn λ wächst, etwas größeres [$\sin \frac{1}{2} \lambda^2$] durch etwas kleineres [$\cos \lambda$] dividirt werden, daher muß dieser Quotient größer werden als vorher, folglich wird ein größerer Quotient mit a multiplizirt, welches Produkt größer werden muß, als es war, da man λ kleiner nahm.

34.

Wenn $L = 60°$ ist, so ist $\sin \frac{1}{2} L = \sin 30° = \cos L = \cos \lambda = \frac{1}{2}$; weil sin 39° die halbe Sehne eines Bogens von 60° ist, und die Sehne des Bogens von 60° $= r = 1$, folglich ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$, und da $\sin \frac{1}{2} \lambda$ oder $\sin \frac{1}{2} L = \frac{1}{2}$, so ist

F) $\sin \frac{1}{2} \lambda^2 = \frac{1}{4}$

Nun setze man in der Formel

$$VO = a \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \lambda^2}{\cos \lambda} \; (32, v, E)$$

$$\sin \frac{1}{2} \lambda^2 = \frac{1}{4} \; (F)$$

$$VO = a \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$VO = a \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = a \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2} a$$

Wenn $VO = \frac{1}{2} a$ ist, so muß CM in MA reflektirt werden. Denn alsdann ist $LV + VO = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a = a$ (32, v.)

Wenn L noch größer als 60° wird, so wird $\sin \frac{1}{2} L$ auch noch größer, und hingegen $\cos L$ noch kleiner, welches, wenn $\sin \frac{1}{2} L^2$ durch $\cos L$ dividirt wird, einen noch größern Werth giebt, als in 32, v, *E*). Daher wird auch VO größer als $\frac{1}{2}$ a, und LV + VO noch größer als

der Halbmesser, welches anzeigt, daß der reflektirte Strahl hinter dem Spiegel die Verlängerung von LA trift.

38, I.

Nach Geom. 44. S. 1. Z. verhalten sich die Inhalte zweier Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser, oder daher auch wie die Quadrate der Halbmesser; folglich verhält sich die Fläche des Kreises, welche PM zum Halbmesser hat, zur Fläche des Kreises, dessen Halbmesser VS ist, wie $PM^2 : VS^2$.

38, II.

$$1 : \sin\lambda = LM : PM$$
$$LM = a$$

$$1 : \sin\lambda = a : PM$$

$$\alpha)\quad PM = a \, . \sin\lambda$$
$$1 : \cos\lambda = a : LP$$

$$G)\quad LP = a \, . \cos\lambda$$
$$OP = LP - LO \quad (p. f.)$$
$$LP = a \, . \cos\lambda \quad (G)$$

$$OP = a \, . \cos\lambda - LO$$
$$LO = \frac{a}{2 \, . \cos\lambda} \quad (32, IV, A)$$

$$OP = a \, . \cos\lambda - \frac{a}{2 \, . \cos\lambda}$$

$$OP = \frac{2 \, . a \, . \cos\lambda}{2} - \frac{a}{2 \, . \cos\lambda}$$

$$OP = \tfrac{1}{2} a \,.\, 2 \,.\, \cos\lambda - \tfrac{1}{2} a \,.\, \frac{1}{\cos\lambda}$$

$$OP = \tfrac{1}{2} a \left(2 \cos\lambda - \frac{1}{\cos\lambda}\right)$$

$$H)\ OP = \tfrac{1}{2} a \left(\frac{2 \cos\lambda^2 - 1}{\cos\lambda}\right)$$

Den Zähler im letzten Faktor drücke man nach Trig. 19. S 5. Z. aus, wo steht, daß $\cos 2\varphi = 2 \cos\varphi^2 - 1$, wenn $\varphi = \lambda$, so bekommt man $\cos 2\lambda = 2 \cos\lambda^2 - 1$. Wenn man in *H*), statt $2 \cos\lambda^2 - 1$, $\cos 2\lambda$ setzt, so bekommt man

$$J)\ OP = \tfrac{1}{2} a \,.\, \frac{\cos 2\lambda}{\cos\lambda}$$

Des Spiegels Tiefe ist

$$AP = LA - LP \text{ (p. f.)}$$

$$AP = a - a \,.\, \cos\lambda \ (G)$$

$$AP = a (1 - \cos\lambda)$$

Schon in 32, V, *D*) hatten wir $\cos\lambda$ aus Trig. 10. S 5. Z. gefunden, wo $\cos\lambda = 1 - 2 \sin\tfrac{1}{2}\lambda^2$ war; diesen Werth setze man hier statt $\cos\lambda$, so bekommt man

$$AP = a \,.\, [1 - (1 - 2 \sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)]$$

$$AP = a \,.\, (1 - 1 + 2 \sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)$$

$$B)\ AP = 2 \,.\, a \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

38, III.

$$\frac{OP}{OV} = \frac{\frac{1}{2} a . \frac{\cos 2\lambda}{\cos\lambda} \; (38, II, J)}{\frac{a . \sin \frac{1}{2}\lambda^2}{\cos\lambda} \; (32, V, E)}$$

$$\frac{OP}{OV} = \frac{1}{2} a . \frac{\cos 2\lambda}{\cos\lambda} . \frac{\cos\lambda}{a . \sin\frac{1}{2}\lambda^2}$$

$$\frac{OP}{OV} = \frac{a . \cos 2\lambda . \cos\lambda}{2\cos\lambda . a . \sin\frac{1}{2}\lambda^2}$$

$$K) \; \frac{OP}{OV} = \frac{\cos 2\lambda}{2 . \sin\frac{1}{2}\lambda^2}$$

In den beiden Dreiecken MPO und SVO ist

MPO = SVO = R

MPO = SOV als Vertikalwinkel

△ MOP ∽ △ SOV

OP : OV = PM : VS

$$L) \; \frac{OP}{OV} = \frac{PM}{VS} = \frac{\cos 2\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda^2} \; (K)$$

41.

Zu der Rechnung im Buche ist die Formel 38, III, L) angewandt worden, nemlich $\frac{PM}{VS} = \frac{\cos 2\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda^2}$; wobei nur noch zu bemerken ist, daß nach den Vorerin-

nerungen vor Trig. 19. S. von jedem Logarithmen des Sinus 10 abgezogen ist, um sie dem Radius 1 anzupassen.

41, II.

Die Dichtigkeit des einfallenden Lichts verhält sich zu der Dichtigkeit des zurückgeworfenen, in dem Kreise mit VS beschrieben, wie $PM^2 : VS^2$ (38, I) oder wenn des einfallenden Lichtes Dichtigkeit = 1 gesetzt wird, so ist

$PM^2 : VS^2 = 1 : \frac{VS^2}{PM}$. Daher drückt $\frac{VS^2}{PM^2}$ die

Dichtigkeit des zurückgeworfenen Lichts aus.

41, III.

Man findet VO, wenn a = 1, und $\lambda = 5°$ ist, aus 32, V, *E*) nach der dort befindlichen Formel $VO = \frac{a \,.\, \cos \frac{1}{2}\lambda^2}{\cos \lambda}$ durch Logarithmen, wenn man eben wieder

10 von dem Lagarithmen eines jeden Sinus abzieht, auf die Art.

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda = \log \sin 2° \, 30' = 0,6395796 - 2$$

verdoppelt

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda^2 = \qquad 0,2793592 - 3$$
$$\log \cos \lambda = \log \cos 5° = \qquad 0,9983442 - 1$$

$$\log VO = 0,2810150 - 3$$
$$VO = 0,0019099$$

Die Zahl für diesen Logarithmen findet man, wenn man blos die Mantisse, ohne sich um eine Kennziffer zu bekümmern, in den Tafeln aufsucht. Die Mantisse mit der Kennziffer 4, gehört zu log 19099. Zu der Man-

tisse hatte man die Charakteristik 4 genommen, daher müssen vier Ziffern für den Dezimalbruch abgeschnitten werden, es gehörte also der Logarithme 0,2810150 für die Zahl 1,9099. Weil aber die eigentliche Kennziffer — 3 ist, so muß die Zahl noch durch 1000 dividirt werden; folglich gehört zu dem Logarithmen 0,2810150 — 3 die Zahl

$$\frac{1,9099}{1000} = \frac{19099}{10000} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{19099}{10000000} = 0,0019099.$$

I) $PM = a \cdot \sin \lambda$ (38, II, α) $= 1 \cdot \sin 5^\circ =$ 0,0871557. VS kann man aus $\frac{PM}{VS} = 258,79$ (41, II. des Buchs) finden.

$$\frac{PM}{VS} = 258,79$$

$$PM = 0,0871557 \text{ (I)}$$

$$\frac{0,0871557}{VS} = 258,79$$

$$\frac{0,0871557}{258,79} = VS$$

$$\log 0,0871557 = 0,9402938 - 2$$
$$\log 258,79 = 2,4129623$$

$$\log VS = 0,5273305 - 4$$
$$VS = 0,00033677$$

des Spiegels Tiefe $AP = 2\,a \cdot \sin \tfrac{1}{2} \lambda^2$ (38, II, β.)

$\log \sin \tfrac{1}{2} \lambda = \log \sin 2^\circ\, 30' = 0,6396796 - 2$

verdoppelt 2

$$\log \sin \tfrac{1}{2} \lambda^2 = 0,2793592 - 3$$
$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log AP = 0,5803892 - 3$$
$$AP = 0,0038053$$

41, VI.

Wenn man $\lambda = 18°$ annimmt, und noch $a = 1$ setzt, so ist

$$\frac{PM}{VS} = \frac{\cos 2\lambda}{2 \cos \tfrac{1}{2} \lambda^2}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2} \lambda = \log \sin 9° = 0,1943324 - 1$$
verdoppelt 2

$$\log \sin \tfrac{1}{2} \lambda^2 = 0,3886648 - 2$$
$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log 2 \sin \tfrac{1}{2} \lambda^2 = 0,6896948 - 2$$
$$\log \cos 2\lambda = \log \cos 36° = 0,9079576 - 1$$

$$\log \frac{PM}{VS} = 1,2182628$$
verdoppelt 2

$$\log \left(\frac{PM}{VS}\right)^2 = 2,4365256$$

$$\frac{PM}{VS} = 16,529$$

1) $\left(\frac{PM}{VS}\right)^2 = 273,22$

41, VII.

Weil $\frac{PM^2}{VS^2}$ die Dichtigkeit des zurückgeworfenen Lichts ausdrückt, (41, II, Erläut.) und die Dichtigkeiten des zurückgeworfenen Lichts nothwendig bei einem Spiegel von 5° und einem von 18° von einerlei Kugel müssen verschieden seyn, so müssen sich diese Dichtigkeiten verhalten wie $\frac{PM^2}{VS^2}$ für 5°, zu $\frac{PM^2}{VS^2}$ für 18°, also wie 66977 (41, II, d. B.) : 273 (41, VI, I).

Die Dioptrik.

10, II.

Es muß sich der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des gebrochnen Winkels verhalten, wie 3 : 2, folglich

$$3 : 2 = \sin TCD : \sin VCD$$

$$\sin VCD = \tfrac{2}{3} . \sin TCD$$

$$\sin VCD = \frac{\sin TCD}{\frac{3}{2}}$$

Will man diese Rechung durch Logarithmen führen, so muß man den $\log \frac{3}{2}$ von log sin TCD abziehen, den log sin VCD zu finden. Es sei TCD = 70°, so ist

$$\log 3 = 0{,}4771212$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log \tfrac{3}{2} = 0{,}1760912$$
$$\log \sin 70^\circ = 9{,}9729857$$

$$\log \sin VCD = 9{,}7968946$$
$$VCD = 38^\circ 47'$$

11.

Es ist wieder $3 : 2 = \sin TCD : \sin VCD$

$$\sin TCD = \tfrac{3}{2} . \sin VCD$$

$$\log \tfrac{3}{2} = 0{,}1760912$$
$$\log \sin 38^\circ 47' = 9{,}7968946$$

$$\log \sin TCD = 9{,}9729858$$
$$TCD = 70^\circ$$

12.

Wenn TCD = 30° ist, so ist sin VCD = $\frac{2}{3}$. sin TCD = $\frac{2}{3}$. sin 30°

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log 3 = 0,4771212$$
$$\log \tfrac{2}{3} = 0,8239088 - 1$$
$$\log \sin 30° = 9,6989700$$
$$\log \sin VCD = 9,5228788$$
$$VCD = 19° 28'$$

Nimmt man nun $\frac{2}{3}$ von 30°, so findet man daß der Winkel 20°, welcher auf diese Art gefunden wird, um 32′ größer ist, als der wahre Winkel von 19° 28′.

13.

Wenn TCD ein rechter Winkel wäre, so wäre sein Sinus dem Radio gleich, und

$$\sin VCD = \tfrac{2}{3} \sin TCD \ (12)$$
$$\sin VCD = \tfrac{2}{3} . 10000000$$
1) $\sin VCD = 6666666$
$$\sin VCD = 41° 48'$$
$$VCD = QVW \ (p. f.)$$
$$\sin QVW = \sin 41° 48'$$

Es ist aber ZVW = $\frac{3}{2}$ QVW (12) oder

$$\sin ZVW = \tfrac{3}{2} \sin QVW$$
$$\sin ZVW = \tfrac{3}{2} \sin VCD \ (p. f.)$$
$$\sin ZVW = \tfrac{3}{2} . 6666666 \ (1)$$
$$\sin ZVW = 9999999$$

oder weil etwas am sin VCD (1) fehlt, so ist

$$\sin ZVW = 10000000$$

Der Winkel ZVW ist also ein rechter. Ist daher VCD = QVW größer als 41° 48′ + noch etwas, so wird der sin ZVW größer als sin tot welches anzeigt, daß keine Brechung des Strahls geschieht, sondern daß er in das Glas zurück gebrochen wird. Hier in diesem Falle sind, weil BC und AD parallel sind, die Winkel VCD und QVW gleich, sind aber die Linien BC und AD nicht parallel, so sind auch die Winkel VCD und QVW nicht gleich. Daher geschieht allgemein keine Brechung des Lichtstrahls, sondern eine Zurückwerfung in das Glas selbst, wenn der Winkel ZVW größer als 41° 48′ wird.

25.

Beim Meniskus ist allezeit der Halbmesser der concaven Seite größer, als der Halbmesser der convexen Seite; und da die erhabene oder convexe Seite vorn hin gekehrt seyn soll, so ist allezeit der Halbmesser der eingebogenen oder concaven Seite = ϱ verneint; daher giebt die Formel in 22 einen verneinten Dividend, daß also für

$\frac{2 r \varrho}{r + \varrho}$ man $\frac{2 r . - r}{r + (-\varrho)} = \frac{-2 r \varrho}{r - \varrho}$ setzen muß. Und weil

ϱ verneint, auch zugleich größer als r ist, so wird der Divisor negativ. Da nun der Divisor sowohl, als der Dividend verneint sind, so muß der Quotient bejaht werden. Oder wenn eines Bruchs Zähler und Nenner zugleich durch einerlei Zahl multiplizirt werden, so bleibt der Bruch ungeändert (Ar. I. 65.) Wenn man also in $\frac{2 r \varrho}{r - \varrho}$ oben und

unten mit — 1 multiplizirt, so bekommt man

$$\frac{-2 r \varrho}{r - \varrho} = \frac{-2 r \varrho . -1}{(r - \varrho) . -1} = \frac{2 r \varrho}{-r + \varrho} = \frac{2 - r \varrho}{\varrho - r}$$

27.

Wenn man in der Formel für die Brennweite, welche sich in 22 befindet, statt der positiven Halbmesser r und ϱ, für ein Glas welches auf beiden Seiten hohl ist, negative Halbmesser nimmt, so bekommt man statt $\frac{2\,r\,\varrho}{r+\varrho}$ hier $\frac{2\,.\,-r\,.\,-\varrho}{-r-\varrho} = \frac{+2\,r\,\varrho}{-(r+\varrho)}$ welches einen verneinten Quotienten giebt, weil ein positives Produkt durch etwas negatives dividirt wird.

28.

Wenn ein Glas auf beiden Seiten gleich viel hohl ist, so sind seine Halbmesser gleich und beide negativ, folglich aus 22 der Brennpunkt, oder hier der Zerstreuungspunkt $\frac{2\,r\,\varrho}{r+\varrho}$, wenn $-r$ und $-\varrho$, und $r=\varrho$ genommen wird,

$$\frac{2\,.\,-r\,.\,-r}{-r-r} = \frac{2\,.\,+r^2}{-2\,r} = \frac{2\,r^2}{-2\,r} = -r$$

dem Halbmesser der hohlen Fläche gleich, aber verneint. Für das Planconcavglas ist also der Halbmesser der planen Seite unendlich. Man setzte daher $\varrho = \infty$, und nun ist wieder aus 22 für $\frac{2\,r\,\varrho}{r+\varrho}$ hier $\frac{2\,.-r\,.\,\infty}{-r+\infty} = \frac{-2\,r\,.\,\infty}{-r+\infty}$. Da nun eine unendlich große Größe durch eine endliche weder vermehrt noch vermindert wird, so bekommt man $\frac{-2\,r\,\infty}{\infty} = -2\,r =$ dem Durchmesser der hohlen Flä-

che des Glases. Dieses giebt den Zerstreuungspunkt für ein Planconcavglas an.

30, II.

Der Abstand des Bildes hinter dem Brennpunkte des Glases, ist

$$f - l = BF - l \ (29) = \frac{bl}{b-l} - l$$

$$f - l = \frac{bl - bl + l^2}{b - l}$$

$$f - l = \frac{l^2}{b-l}$$

30, VI.

Aus $f = \frac{bl}{b-l}$ (29) soll man b finden.

$$f \cdot (b - l) = bl$$

$$fb - fl = bl$$

$$fb - bl = fl$$

$$(f - l)\ b = fl$$

$$b = \frac{fl}{f-l}$$

30, VII.

Wenn b kleiner ist als l, so wird in der Formel $f = \frac{bl}{b-l}$ (29) der Werth des f negativ, weil der Divisor

negativ wird, und alsdann eine positive Größe durch eine negative dividirt werden muß, welches einen negativen Quotienten giebt.

35.

Wenn die Dicke des Glases sehr klein ist, folglich auf sie nicht Rücksicht genommen wird, so wird PQ eine so kleine Linie, daß sie für nichts zu achten ist, und also die Entfernung der beiden Linien EP und eQ sehr wenig beträgt; da nun diese beiden Linien parallel sind, so können sie für eine einzige gerade Linie gelten, von welchen PQ ein Stück ist.

40, I.

Wenn man hier, wie in 35, voraussetzt, daß EPQe eine gerade Linie ist, so sind die beiden Dreiecke EOF und EDO ähnlich, weil bei F und D rechte Winkel und bei O Vertikalwinkel sind. Daher

$$Fe : DE = FO : DO$$

40, III.

Es sei PAQ = pAq = μ, und weil $\triangle$ PAQ und $\triangle$ pqa ähnlich sind, so ist

$$Aq : pq = 1 : \tang \mu$$

$$1)\ \tang \mu = \frac{pq}{Aq}$$

40, VI.

Aus der Formel 40, III, 1) $\frac{pq}{Aq} = \tang \mu$ bekommt man pq = Aq . tang μ, wo pq das Bild der

Sonne ist. Nach den im Buche angegebenen Sätzen für Aq; μ hat man

$$\log pq = \log Aq + \log \tang \mu$$
$$\log 120 = 2,0791812$$
$$\log \tang 16' = 0,6678492 - 3$$ (Vorer. v. Trig. 19. S.)

$$\log pq = 0,7470304 - 1$$

$pq = 0,55851$ Zoll für das halbe Sonnenbild; für das ganze 1,11702 Zoll.

Zugaben.

I.

Unterschied der wahren und scheinbaren Horizontallinie. Stat. 122.

4.

Wenn man setzt

$$1 : \text{tang } K = a : LG, \text{ so ist daher}$$

$$LG = a \cdot \text{tang } K$$

und weil LG und LH sehr unmerklich unterschieden seyn sollen, kann man auch $LG = c = a \cdot \text{tang } K$ setzen.

6.

Es bedeute n eine gewisse Anzahl von Toisen, oder irgend eines Maaßes, welche auf einen Grad gehen, so muß

$$n : c = 1^\circ : K \text{ seyn, also}$$

$$K = \frac{c}{n} \cdot 1^\circ$$

7.

$$\text{Es ist } LG^2 = GK^2 - LK^2 \text{ (Geom. 15. S.)}$$

$$GK = a + x$$

$$LG^2 = (a + x)^2 - LK^2$$

$$LK = a$$

$$LG^2 = (a + x)^2 - a^2$$

$$KG^2 = a^2 + 2\,a\,x + x^2 - a^2$$

$$KG^2 = 2\,a\,x + x^2$$

$$LG^2 = x\,(2\,a + x)$$

und da x in Vergleichung mit a sehr klein ist, so wird es gar weggelassen, und man setzt *A*) $LG^2 = 2\,a\,x$

8.

$LG = c$ (4), folglich ist aus 7, *A*)

$$c^2 = 2\,a\,x$$

$$\frac{c^2}{2\,a} = x$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{a} = x$$

$$\tfrac{1}{2}\,c \cdot \frac{c}{a} = x$$

In 4 ist $a \cdot \text{tang } K = c$, folglich $\text{tang } K = \frac{c}{a}$;

diesen Werth für $\frac{c}{a}$ hier gesetzt, bekommt man

$$x = \tfrac{1}{2}\,c \cdot \text{tang } K$$

und weil K ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man dessen Tangente und Bogen gleich setzen, folglich statt tang K blos K sagen, daher ist

$$x = \tfrac{1}{2}\,c\,K$$

$$K = \frac{c}{n} \cdot 1^\circ \ (6)$$

$$x = \tfrac{1}{2}\,c \cdot \frac{c}{n} \cdot 1^\circ$$ oder

9.

$$x = \frac{c^2 \cdot 1^\circ}{2n}$$

$$x = \frac{c^2}{n} \cdot \frac{1^\circ}{2}$$

$$x = \frac{c^2}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^\circ$$

13.

Dieses Exempel nach der Formel 9 aufgelöst, hat man $\log x = \log 30' - \log n + \log c^2$. Den Logarithmen der Länge des Bogens von $30'$ in Dezimaltheilen des Halbmessers zu finden, bedenke man, daß, wenn der Durchmesser $= 1$, die Peripherie $= 3,1415926....$ ist, und für den Halbmesser $= 1$ ist sie $2 \cdot 3,1415926....$

Nun ist $30' = \frac{1}{2}^\circ = \frac{360^\circ}{720}$, daher $\frac{2 \cdot 3,1415926....}{720}$

die Länge des Bogens von $30'$ ist. Die Rechnung mit Logarithmen geführt, ist $\log 30' = \log 2 + \log 3,1415926.... - \log 720$

$\log 3,1415926... = 0,4971499$ (Hydrost. 66. Ex. 1.)
$\log 2 \qquad\qquad = 0,3010300$

$0,7981799$
$\log 720 = 2,8573325$

$\log 30' = 0,9408474 - 3$

Nun setze man

$$\begin{array}{rl} \log 30' = & 0,9408474 - 3 \\ \log 57060 = & 4,7563318 \\ \hline & 0,1845156 - 7 \\ \log c^2 = 2 \log 4000 = & 7,2041200 \\ \hline \log x = & 0,3886356 \\ x = & 2,4470 \text{ Toisen.} \end{array}$$

und die Toise zu 6 Fuß, giebt x = 14,6820 Fuß, oder 14 Fuß, und den Fuß zu 12 Zollen, daher die Dezimaltheile zu Zollen gemacht, giebt 8,1840 Zoll. Für das ganze x bekommt man also 14 Fuß 8,184 Zoll.

16, 17.

Wenn ein Grad 57438 = n Toisen hat, und man will x für eben die Weite von c = 4000 Toisen berechnen, so stellt man die Rechnung eben nach der Formel

$$x = \frac{c^2}{n} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1^\circ \text{ (9) an}$$

$$\begin{array}{rl} \log 30' = & 0,9408474 - 3 \text{ (13)} \\ \log 57438 = & 4,7591993 \\ \hline A) \log \frac{30'}{n} = & 0,1816481 - 7 \\ \log c^2 = 2 \log 4000 = & 7,2041200 \\ \hline \log x = & 0,3857681 \\ x = & 2,4309 \text{ Toisen.} \end{array}$$

18, 19.

Wenn $\frac{30'}{n}$ beständig unverändert bleibt, so ändert sich x blos wenn sich c^2 ändert. Es steht daher x mit c^2

im Verhältniß. Da dieses ist, so darf man nur ein c für das größte annehmen, und daraus für kleinere Werthe von c, die kleinern dem x zugehörigen Werthe berechnen. Wenn man für c = 4000 in (13), x = 2,4470 Toisen gefunden hat, so findet man für c = 2000 Toisen, x wenn man spricht

$$4000^2 : 2,4470 = 2000^2 : x$$

$$16000000 : 2,4470 = 4000000 : x$$

$$16 : 2,4470 = 4 : x$$

$$4 : 2,4470 = 1 : x$$

$$x = \frac{2,4470}{4}$$

$$x = 0,61175 \text{ Toisen}$$

mit 6 zu Fussen gemacht, giebt

$$x = 3,6705 \text{ Fuß}$$

mit 12 zu Zollen

$$x = 44,046 \text{ Zolle.}$$

II.

Wie weit man von einer Höhe sehen kann.

1.

Wenn HG = x und der Halbmesser der Erde KH = a, der Winkel LKH = K, so ist

$$KH : KH + HG = 1 : \sec K$$

$$a : a + x = 1 : \sec K$$

$$\sec K = \frac{a + x}{a}$$

$$\sec K = \frac{a}{a} + \frac{x}{a}$$

$$\sec K = 1 + \frac{x}{a}$$

die Länge des Bogens LH bekommt man, wenn man das Maaß des Winkels K für den Halbmesser = 1, mit dem Halbmesser = a multiplizirt, folglich LH = a . K.

2.

Wenn HG = x = a = dem Halbmesser der Erde, so wird aus

$$\sec K = 1 + \frac{x}{a}$$

$$\sec K = 1 + \frac{a}{a}$$

$$\sec K = 1 + 1 = 2$$

dieses in den Sekantentafeln aufgesucht, so findet man den Winkel K. Hat man keine Sekantentafeln so denke man daran, daß

$$\text{tang } K^2 = \sec K^2 - a^2$$

$$\text{tang } K = \sqrt{(\sec K^2 - a^2)}$$

$$\text{tang } K = \sqrt{(4 + 1)} = \sqrt{3}$$

$$\text{tang } K = 1,7320508$$

$$\text{tang } K = \text{tang } 60^\circ$$

Es wäre also die Länge des Bogens LH = n K, wenn mann Picards Grad = 57060 Toisen annimmt

$$LH = 57060 \cdot 60$$

$$LH = 3423600 \text{ Toisen.}$$

6.

In I, 9 hat man

$$x = \frac{c^2}{n} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1^\circ$$

$$x = \frac{c^2 \cdot 30'}{n}$$

$$n\,x = c^2 \cdot 30'$$

$$\frac{n\,x}{30'} = c^2$$

$$r\left(\frac{n\,x}{30'}\right) = c$$

7.

In I, 6 hat man

$$K = \frac{c}{n} \cdot 1^\circ = \frac{c}{n} \text{ Grade}$$

und mit 60 zu Minuten gemacht, bekommt man

$$K = \frac{60 \cdot c}{n}$$

$$A)\ K = \frac{60}{n} \cdot c$$

$$c = r\left(\frac{n\,x}{30'}\right)\ (6)$$

$$K = \frac{60}{n} . r\left(\frac{n\,x}{30'}\right)$$

$$K = r\,\frac{3600 . n\,x}{n^2 . 30 . 1'}$$

$$K = r\,\frac{120 . n\,x}{n^2 . 1'}$$

$$K = r\,\frac{120\,x}{n . 1'}$$

8, Exempel *a*.

Es sei $x = 5$ Fuß $= \frac{5}{6}$ Toisen; $n =$ Picards Grad $= 57060$ Toisen (I, 13,) so hat man für

$$K = \frac{60}{n} . c\ (7, A)$$

$$c = r\,\frac{n\,x}{30'}\ (6) = x : \frac{30'}{n}$$

$$\begin{array}{l} \log 5 = 0{,}6989700 \\ \log 6 = 0{,}7781513 \\ \hline 0{,}9208187 - 1 \\ \hline \log \frac{30'}{n} = 0{,}1845156 - 7\ (I,\ 17,\ A) \\ \hline 2 \log c = 6{,}7363031 \\ \hline B)\ \log c = 3{,}3681515 \\ \log 60 = 1{,}7781512 \\ \hline 5{,}1463027 \\ \log 57060 = 4{,}7563318 \\ \hline \log K = 0{,}3899709 \end{array}$$

$$c = 2334,2 \text{ Toisen}$$
$$K = 2,4545 \text{ Minuten.}$$

8.

Die Formel in 6 heist

$$c = r\,\frac{n\,x}{30'}$$

Hieraus findet man x

$$c^2 = \frac{n\,x}{30'}$$

$$c^2 . 30' = n\,x$$

$$\frac{c^2 . 30'}{n} = x$$

8. Exempel β.

Die Weite auf welche man sich umsehen kann ist c, und hier eine Meile; diese muß in Toisen ausgedrückt werden. Man weiß hierzu die Menge der Toisen für einen Grad, oder 15 Meilen = n, folglich ist

$$15\ M : 1\ M = n : c$$

$$c = \frac{n}{15}$$

Daher ist $x = \frac{30'}{n} . \frac{n}{15^2}$

$$x = \frac{30' . n}{15^2}$$

$$x = \frac{30' \cdot n}{225}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log 30' = 0,9408474 - 3 \\ \log 57060 = 4,7563318 \end{array}\right\} (I, 13)$$

$$\log 30' \cdot n = 2,6971792$$
$$\log 225 = 2,3521825$$

$$\log x = 0,3449967$$
$$x = 2,2130 \text{ Toisen.}$$

Neigung der Linie GL unter den scheinbaren Horizont durch G.

9.

Wenn ein Beobachter sich in G befindet, so ist sein scheinbarer Horizont GI (Fig. X d. Erläut.) nemlich ein Perpendikel auf GK. Die Linie GL aber, welche vom Auge des Beobachters bis an den ihm noch sichtbaren Punkt auf der Erde gezogen wird, senkt sich unter die scheinbare Horizontallinie des Beobachters, und macht mit dieser einen Winkel IGL.

Im Dreiecke IGK ist der genannte Winkel ein rechter, folglich

$$GIK + K = R$$

Die Linie GL steht bei L auf dem Halbmesser der Erde senkrecht, folglich ist im Dreiecke IGL ebenfalls der genannte Winkel ein rechter, daher

$$GIL + IGL = R$$

und deßwegen

$$GIK + K = GIL + IGL$$
$$GIK = GIL \ (p. f.)$$
$$K = IGL.$$

Der scheinbare Horizont macht also mit GL einen Winkel = K.

12.

Aus 7 hat man die Formel

$$K = r \frac{120\,x}{n \,.\, 1'}$$

Für x nehme man hier 214 Fuß $= \frac{214}{6}$ Toisen so ist

$$\log 214 = 2,3304138$$
$$\log 6 = 0,7781512$$
$$\log x = 1,5522626$$
$$\log 120 = 2,0791812$$
$$\log 120 . x = 3,6314438$$
$$\log n . 1' = 1,2249019$$
$$2 \log K = 2,4065419$$
$$\log K = 1,2032709$$

$$\log n = 4,7611758$$
$$\log 1' = 0,4637261 - 4$$
$$\log n . 1' = 1,2249019$$

K = 15,969 Minuten.

Die Dezimaltheile der Minuten mit 60 zu Sekunden gemacht, kommt K = 15 Minuten 58, 14 Sekunden.

III.

Vergleichung der Grade unterschiedener Thermometer.

Zu Aerometrie 86.

VII.

Da auf 5 de l' Islische Grade 6 Fahrenheitische gehen, so kann man finden, wieviel n de l' Islische Grade Fahrenheitsche betragen. Denn es ist

$$5 : n = 6 : \frac{n \cdot 6}{5} \text{ Fahr.}$$

Weil die Fahrenheitischen Grade von unten hinauf, vom Eispunkte bis zum Siedpunkte gezählt werden, so ist 212 — p Fahr. = n de l' Islischen; n de l' Islische $= \frac{n \cdot 6}{5}$ Fahr. Folglich

$$212 - p \text{ Fahr.} = \frac{n \cdot 6}{5} \text{ Fahr.}$$

$$212 - p = \frac{n \cdot 6}{5}$$

VIII.

Aus dieser letzten Formel kann man die Stelle finden, wobei der Fahrenheitische Grad stehen muß, wenn ein gewisser de l' Islischer gegeben ist, und umgekehrt. Die de l' Islischen zuerst zu finden wird, aus

$$212 - p = \frac{n \, . \, 6}{5}$$

$$212 - p = n \, . \, \tfrac{6}{5}$$

$$(212 - p) \, . \, \tfrac{5}{6} = n$$

$$212 \, . \, \tfrac{5}{6} - p \, . \, \tfrac{5}{6} = n$$

$$\frac{1060}{6} - p \, . \, \tfrac{5}{6} = n$$

1) Fahr. $176 \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{6} p = n$ de l' Islischen.

Die Fahrenheitischen zu finden wird wieder aus

$$212 - p = \frac{n \, . \, 6}{5}$$

$$212 - \frac{n \, . \, 6}{5} = p$$

$$212 - \tfrac{6}{5} n = p$$

$$212 - (1 + \tfrac{1}{5}) \, n = p$$

2) de l' Isl. $212 - 1,2 \, . \, n = p$ Fahr.

IX.

Wenn $n = 120$ de l' Islische Grade ist, so findet man die Fahrenheitischen nach VIII, 2)

$$212 - 1,2 \, . \, n = p$$

$$212 - 1,2 \, . \, 120 = p$$

$$212 - 12 \, . \, 12 = p$$

$$212 - 144 = p$$

$$68 = p$$

Hätte man 68 Fahrenheitische, man wollte die de l'Islischen finden, so ist

$$176\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{6}\,p = n \text{ (VIII, 1)}$$

$$176\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{6}\,.\,68 = n$$

$$176\tfrac{2}{3} - \frac{340}{6} = n$$

$$176\tfrac{2}{3} - 56\tfrac{2}{3} = n$$

$$120 = n$$

XII.

Beim Eispunkte des Reaumur steht o, und beim Fahrenheit 32, daher ist o Reaumur = 32 Fahrenheit. Der Raum vom Eispunkte bis zum Siedpunkte ist beim Reaumur in 90 Grade und beim Fahrenheit in 180 getheilt; daher geben 90 Reaumur. 180 Fahr. also 1 Reaumur. = 2 Fahr. Wenn nun beim Reaumur das Quecksilber bei m und beim Fahrenheit bei p steht, so giebt m die Stelle des Reaumurischen und p — 32 die Stelle des Fahrenheitischen Thermometers über dem Eispunkte an. Will man die Stelle des Reaumurischen Thermometers im Fahrenheitischen bestimmen, so hat man bei m Reaum. 2 m + 32 Fahr. da 1° Reaum = 2° Fahr. weßwegen man zu der doppelten Menge des Reaum. noch 32 addiren muß, den Stand des Quecksilbers im Fahrenheitischen zu bekommen. Es sind also

$$2\,m + 32 \text{ Fahr} = p \text{ Fahr.}$$

$$2\,m = p - 32$$

$$m = \frac{p - 32}{2}$$

m Reaum $= \frac{1}{2} p - 16$ Fahr.

Man habe 68 Fahrenheitische Grade in Reaumurische zu verwandeln, so ist

$$m = \frac{1}{2} p - 16$$

$$m = \frac{1}{2} . 68 - 16$$

$$m = 34 - 16$$

$$m = 18$$

Es steht also das Quecksilber beim Fahrenheit bei 68, wenn es beim Reaumur bei 18 steht.

Man soll 18 Reaum. in Fahr. verwandeln, so ist,

$$2 m + 32 = p$$

$$2 . 18 + 32 = p$$

$$36 + 32 = p$$

$$68 = p$$

XIV.

Da vom Eispunkte bis zum Siedpunkte beim Schwedischen Thermometer 100 Grade sind, und beim Fahrenheitischen 180, so sind 100 Schw. = 180 Fahr. oder 10 Schw. = 18 Fahr. oder 5 Schw. = 9 Fahr. Folglich 1 Schw. = $\frac{9}{5}$ Fahr. Daher f Schw. = $\frac{9}{5} f$ Fahr. und weil beim Schwedischen der Eispunkt bei 0, am Fahrenheitischen aber bei 32 ist, so geben die $\frac{9}{5} f$ Fahrenheitische, über dem Eispunkte $p - 32$. Also

$$\tfrac{9}{5}\,ſ\ \text{Fahr} = p - 32\ \text{Fahr.}$$

$$ſ = (p - 32)\ \tfrac{5}{9}$$

$$ſ = \frac{5 \cdot (p - 32)}{9}$$

Ferner $\frac{9}{5}\,ſ$ Fahr $= p - 32$ Fahr.

$$\alpha)\ \tfrac{9}{5}\,ſ + 32 = p$$

XVI.

Man soll Schwedische Grade mit de l' Islischen vergleichen; hierzu hat man in VII die de l' Islischen mit Fahrenheitischen verglichen und gefunden, daß $212 - p = \frac{6}{5} \cdot n$ ist. Statt des p, welches der Stand des Quecksilbers für das Fahrenheitische Thermometer ist, setze man den Werth welcher in XIV, α) gefunden ist. Also

$$212 - p = \tfrac{6}{5} \cdot n$$

$$p = 32 + \tfrac{9}{5}\,ſ\ (\text{XIV},\ \alpha)$$

$$212 - (32 + \tfrac{9}{5}\,ſ) = \tfrac{6}{5} \cdot n$$

$$212 - 32 - \tfrac{9}{5}\,ſ = \tfrac{6}{5} \cdot n$$

$$180 - \tfrac{9}{5}\,ſ = \tfrac{6}{5} \cdot n$$

$$(180 - \tfrac{9}{5}\,ſ) \cdot \tfrac{5}{6} = n$$

$$180 \cdot \tfrac{5}{6} - \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot ſ = n$$

$$30 \cdot 5 - \tfrac{9}{6}\,ſ = n$$

$$A)\ 150 - \tfrac{3}{2}\,ſ = n$$

Hieraus suche man ſ

$$150 - \frac{3}{2} s = n$$

$$150 - n = \frac{3}{2} s$$

$$(150 - n) \cdot \frac{2}{3} = s$$

$$150 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} n = s$$

$$50 \cdot 2 - \frac{2}{3} n = s$$

B) $100 - \frac{2}{3} n = s$

XVII.

Man soll 650 de l' Islische Grade = n in Schwedische verwandeln. Es ist also aus XVI, *B*)

$$100 - \frac{2}{3} n = s$$

$$100 - \frac{2}{3} \cdot 650 = s$$

$$100 - \frac{1300}{3} = s$$

$$100 - 433 \frac{1}{3} = s$$

C) $- 333 \frac{1}{3} = s$

die 650 de l' Islischen Grade betragen $333 \frac{1}{3}$ Schwedische unter dem Gefrierpunkte.

Will man $333 \frac{1}{3}$ Schwedische Grade unter dem Gefrierpunkte in de l' Islische verwandeln, so wende man die Formel XVI, *A*) an.

$$150 - \frac{3}{2} s = n$$

$$s = - 333 \frac{1}{3} \quad C)$$

$$150 - \frac{3}{2} \cdot - 333 \frac{1}{3} = n$$

$$150 + \frac{3}{2} \cdot 333 \frac{1}{3} = n$$

$$150 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{1000}{3} = n$$

$$150 + \frac{1000}{2} = n$$

$$150 + 500 = n$$

$$650 = n$$

Es geben daher die 333 $\frac{1}{3}$ Schwedische Grade unter dem Gefrierpunkte die 650 de l' Islischen wieder.

XVIII.

Aus VIII, 2) nehme man die Gleichung

$$212 - 1,2 \cdot n = p$$

wo n den Stand des Quecksilbers im de l' Islischen und p des Fahrenheitischen Thermometers bedeutet. Es sei $n = -414$, so ist

$$212 - 1,2 \cdot n = p$$

$$212 - 1,2 \cdot -414 = p$$

$$212 + 1,2 \cdot 414 = p$$

$$212 + 496,8 = p$$

$$0,8 \text{ beinahe} = 1$$

$$212 + 497 = p$$

$$709 = p$$

Es machen also 414 de l' Islische Grade über dem Siedpunkte, 609 Fahrenheitische Grade über dem Gefrierpunkte.

IV.

Analytische Beweise der vornehmsten dioptrischen Sätze.

Zur Dioptrik 20, u. f.

I.

In dem Dreiecke CDP ist der äussere Winkel CPV den beiden innern, welche ihm gegenüber stehen, gleich, das ist,

$$A)\ CPV = PDC + PCD, \text{ oder } = PDC + PCB$$

Und da der Winkel PDC als sehr klein angenommen wird, so ist auch beinah

$$1)\ AD = DB = b$$

Auch $m : n = \sin CPV : \sin CP\varphi$ (Dioptrik 9, wenn man statt der dort gebrauchten Zahlen, welche das Verhältniß der Refraktion ausdrücken hier $m : n$ schreibt.) Weil aber die Winkel sehr klein seyn sollen, so kann man statt der Sinus die Bogen oder Winkel selbst annehmen, und setzen

$$m : n = CPV : CP\varphi$$

$$B)\ CP\varphi = \frac{n \cdot CPV}{m}$$

II.

In dem Dreiecke DPC ist nach Trig. 10. S.

$DP : CP = \sin BCP : \sin D$ u. weil BCD; D sehr klein sind

$DP : CP = BCP : D$

$$BCP = \frac{DP \cdot D}{CP}$$

$$DP = b \;(I,\ I)\quad CP = CA = r \;(I)$$

1) $$BCP = \frac{b \cdot D}{r}$$

$$CPV = D + BCP \;(I,\ A)$$

$$CPV = D + \frac{b \cdot D}{r} \;(1)$$

$$CPV = \frac{D \cdot r + b \cdot D}{r}$$

2) $$CPV = \frac{r + b}{r} \cdot D$$

$$CP\phi = \frac{n}{m} \cdot CPV \;(I,\ B)$$

$$CP\phi = \frac{n}{m} \cdot \frac{r + b}{r} \cdot D \;(2)$$

3) $$CP\phi = \frac{n \cdot (r + b)}{m \cdot r} \cdot D$$

Im Dreiecke $CP\phi$ ist nach Trig. 10. S.

$CP : C\phi = \sin \phi : \sin CP\phi$ u. weil ϕ; $CP\phi$ sehr klein sind

4) $CP : C\phi = \phi : CP\phi$

$PCD = CP\phi + \phi$ (Geom. 13. S. 1. Z.)

$PCD = BCP$ (p. f.)

$BCP = CP\phi + \phi$

$$\Phi = BCP - CP\Phi$$

$$BCP = \frac{b \,.\, D}{r} \;(1)$$

$$\Phi = \frac{b \,.\, D}{r} - CP\Phi$$

$$CP\Phi = \frac{n \,.\, (b + r)}{m \,.\, r} \,.\, D \;(3)$$

$$\Phi = \frac{b \,.\, D}{r} - \frac{n \,.\, (b + r)}{m \,.\, r} \,.\, D$$

$$\Phi = \left(\frac{b}{r} - \frac{n \,.\, (b + r)}{m \,.\, r}\right) .\, D$$

$$\Phi = \left(\frac{b \,.\, m}{m \,.\, r} - \frac{n \,.\, (b + r)}{m \,.\, r}\right) .\, D$$

$$\Phi = \left(\frac{b \,.\, m - n \,.\, (b + r)}{m \,.\, r}\right) .\, D$$

$$\Phi = \left(\frac{b \,.\, m - (n \,.\, b + n \,.\, r)}{m \,.\, r}\right) .\, D$$

$$\Phi = \left(\frac{b \,.\, m - n \,.\, b - n \,.\, r}{m \,.\, r}\right) .\, D$$

5) $$\Phi = \left(\frac{(m - n) \,.\, b - n \,.\, r}{m \,.\, r}\right) .\, D$$

Aus der Proportion in 4) wird, weil $CP = r$ ist,

$$C\phi = \frac{r \cdot CP\phi}{\phi}$$

$$\phi = \left(\frac{(m-n) \cdot b - n \cdot r}{m \cdot r}\right) \cdot D \ (5)$$

$$C\phi = \frac{r \cdot CP\phi}{\left(\frac{(m-n) \cdot b - n \cdot r}{m \cdot r}\right) \cdot D}$$

$$C\phi = r \cdot CP\phi \cdot \frac{m \cdot r}{[(m-n) \cdot b - n \cdot r] \cdot D}$$

$$C\phi = \frac{r \cdot CP\phi \cdot m \cdot r}{[(m-n) \cdot b - n \cdot r] \cdot D}$$

$$C\phi = CP\phi \cdot \frac{r \cdot r \cdot m}{[(m-n) \cdot b - n \cdot r] \cdot D}$$

$$CP\phi = \frac{n \cdot (b+r)}{m \cdot r} \cdot D \ (3)$$

$$C\phi = \frac{n \cdot (b+r)}{m \cdot r} \cdot D \cdot \frac{r \cdot r \cdot m}{[(m-n) \cdot b - n \cdot r] \cdot D}$$

$$C\phi = \frac{D \cdot n \cdot (b+r) \cdot r \cdot r \cdot m}{m \cdot r \cdot [(m-n) \cdot b - n \cdot r] \cdot D}$$

6) $$C\phi = \frac{n \cdot (b+r) \cdot r}{(m-n) \cdot b - n \cdot r}$$

Man hat auch

$$B\varphi = C\varphi + AC - AB\,(p.f.) = \frac{n.(b+r).r}{(m-n).b-n.r}(6) + r(I) - t(I)$$

$$B\varphi = \frac{n.(b+r).r + [(m-n).b-n.r].r}{(m-n).b-n.r} - t$$

$$B\varphi = \frac{(n.b+n.r).r + (m.b-n.b-n.r)\,p.r}{(m-n).b-n.r} - t$$

$$B\varphi = \frac{(n.b+n.r+m.b-n.b-n.r).r}{(m-n).b-n.r} - t$$

7) $$B\varphi = \frac{m.b.r}{(m-n).b-n.r} - t$$

III.

Im Dreiecke QKφ ist wieder nach Trig. 10. S.

$$Q\varphi : KQ = \sin K : \sin \varphi \text{ oder}$$

$$Q\varphi : KQ = K : \varphi$$

$$K = \frac{\varphi . Q\varphi}{QK}$$

$$QK = KB = \varrho \; (I)$$

1) $$K = \frac{\varphi . Q\varphi}{\varrho}$$

Der Winkel

$$TQ\varphi = K + \varphi \text{ (Geom. 13. S. 1. Z.)}$$

$$K = \frac{\varphi . Q\varphi}{\varrho} \; (I)$$

$$TQ\varphi = \frac{\Phi . Q\varphi}{\varrho} + \varphi$$

$$TQ\varphi = \frac{\Phi . Q\varphi + \varphi . \varrho}{\varrho}$$

$$2)\ TQ\varphi = \frac{Q\varphi + \varrho}{\varrho} . \Phi$$

des Brechungsverhältnisses wegen, ist

$n : m = \sin TQ\varphi : \sin TQF$ oder

$n : m = TQ\varphi : TQF$

$$TQF = \frac{m . TQ\varphi}{n}$$

$$TQ\varphi = \frac{Q\varphi + \varrho}{\varrho} . \varphi\ (2)$$

$$TQF = \frac{m}{n} . \frac{Q\varphi + \varrho}{\varrho} . \Phi$$

$$3)\ TQF = \frac{m . (Q\varphi + \varrho)}{n . \varrho} . \Phi$$

Es ist QFK + K = TQF Geom. 13. S. 1. Z.)

$$QFK = TQF - K$$

$$TQF = \frac{m . (Q\varphi + \varrho)}{n . \varrho} . \varphi\ (3)$$

$$QFK = \frac{m . (Q\varphi + \varrho)}{n . \varrho} . \varphi - K$$

$$K = \frac{\varphi . Q\Phi}{\varrho}\ (1)$$

$$QFK = \frac{m.(Q\phi + \varrho)}{n.\varrho}.\phi - \frac{\phi.Q\phi}{\varrho}$$

$$QFK = \left(\frac{m.(Q\phi + \varrho)}{n.\varrho} - \frac{Q\phi}{\varrho}\right).\phi$$

$$QFK = \left(\frac{m.Q\phi + m.\varrho}{n.\varrho} - \frac{Q\phi}{\varrho}\right).\phi$$

$$QFK = \left(\frac{m.Q\phi + m.\varrho - n.Q\phi}{n.\varrho}\right).\phi$$

$$4)\ QFK = \left(\frac{(m-n).Q\phi + m.\varrho}{n.\varrho}\right).\phi$$

Im Dreicke QFK ist

$\sin F : \sin K = QK : QF$ (Trig. 10. S.) oder

$$F : K = QK : QF$$

$$QF = \frac{QK.K}{F}$$

$$F = QFK = \left(\frac{(m-n).Q\phi + m.\varrho}{n.\varrho}\right).\phi\ (4)$$

$$QF = \frac{QK.K}{\left(\frac{(m-n)\,Q\phi + m.\varrho}{n.\varrho}\right).\phi}$$

$$QF = QK.K.\frac{n.\varrho}{[(m-n).Q\phi + m.\varrho].\phi}$$

$$K = \frac{\phi.Q\phi}{\varrho}\ (I)\ ;\ QK = \varrho\ (I)$$

$$QF = \varrho \cdot \frac{\varphi \cdot Q\varphi}{\varrho} \cdot \frac{n \cdot \varrho}{[(m-n) \cdot Q\varphi + m \cdot \varrho] \cdot \varphi}$$

$$QF = \frac{\varrho \cdot \varphi \cdot Q\varphi \cdot n \cdot \varrho}{\varrho \cdot \varphi \cdot [(m-n) \cdot Q\varphi + m \cdot \varrho]}$$

$$5)\ QF = \frac{Q\varphi \cdot n \cdot \varrho}{[(m-n) \cdot Q\varphi + m \cdot \varrho]}$$

IV.

Da QB als ein sehr kleiner Bogen angenommen ist, so ist BF = QF anzunehmen. Den Werth von QF kann man also auch für BF brauchen. Aus eben dieser Voraussetzung folgt, daß man auch $B\varphi = Q\varphi$ annehmen darf.

$$Q\varphi = B\varphi = \frac{mbr}{(m-n) \cdot b - nr} \ (II, 7)$$

$$1)\ n \cdot B\varphi = \frac{n \cdot bmr}{(m-n)\, b - nr}$$

$$(m-n)\, B\varphi = \frac{mbr\,(m-n)}{(m-n)\, b - nr}$$

$$(m-n)\, B\varphi + m\varrho = \frac{mbr\,(m-n)}{(m-n)\, b - nr} + m\varrho$$

$$(m-n)\, B\varphi + m\varrho = \frac{mbr\,(m-n) + m\varrho\,[(m-n)\, b - nr]}{(m-n)\, b - nr}$$

$$(m-n)\, B\varphi + m\varrho = \frac{mbr\,(m-n) + m\varrho b\,(m-n) - m\varrho nr}{(m-n)\, b - nr}$$

$$(m-n)B\varphi+m\varrho=\frac{m\,[br(m-n)+b\varrho(m-n)]-m\varrho nr}{(m-n)\,b-nr}$$

$$(m-n)B\varphi+m\varrho=\frac{m\,(m-n)\,.\,(br+b\varrho)-m\varrho nr}{(m-n)\,b-nr}$$

$$2)\ (m-n)\,B\varphi+m\varrho=\frac{m\,(m-n)\,b\,(r+\varrho)-m\varrho nr}{(m-n)\,b-nr}$$

Nun nehme man die Gleichung aus III, 5)

$$QF=\varrho\,.\,\frac{n\,.\,Q\varphi}{(m-n)\,Q\varphi+m\varrho}$$ weil $Q\varphi=B\varphi$, so ist

$$QF=\varrho\,.\,\frac{n\,.\,B\varphi}{(m-n)\,B\varphi+m\varrho}$$

$$n\,.\,B\varphi=\frac{mnbr}{(m-n)\,b-nr}\ (1)$$

$$QF=\frac{\varrho\,.\,\dfrac{mnbr}{(m-n)\,b-nr}}{(m-n)\,B\varphi+m\varrho}$$

$$(m-n)\,B\varphi+m\varrho=\frac{m.(m-n)b(r+\varrho)-mnr\varrho}{(m-n)\,b-nr}\ (2)$$

$$QF=\frac{\varrho\,.\,\dfrac{mnbr}{(m-n)b-nr}}{\dfrac{m.(m-n)\,b\,(r+\varrho)-mnr\varrho}{(m-n)\,b-nr}}$$

$$QF=\varrho\,.\,\frac{mnbr}{(m-n)\,b-nr}\,.\,\frac{(m-n)\,b-nr}{m.(m-n)\,b\,(r+\varrho)-mnr\varrho}$$

$$QF = \varrho \,.\, \frac{mnbr\,.\,[(m-n)b - nr]}{[(m-n)b-nr]\,.\,[m(m-n)b(r+\varrho) - mnr\varrho]}$$

$$QF = \varrho \,.\, \frac{mnbr}{m(m-n)b(r+\varrho) - mnr\varrho}$$

3) $$BF = QF = \frac{nbr\varrho}{(m-n)b(r+\varrho) - nr\varrho}$$

Wenn man den Zähler und jeden Theil des Nenners durch b dividirt, so bekommt man

$$BF = QF = \frac{nr\varrho}{(n-n)\,.\,(r+\varrho) - nr\varrho : b}$$

Wenn b sehr groß ist, so wird $\frac{nr\varrho}{b}$ sehr klein, und wenn b unendlich wird, also der Strahl DP mit der Axe parallel einfällt, so wird $\frac{nr\varrho}{b} = 0$. daher kann dieser Theil ganz wegbleiben, und

4) $$l = BF = \frac{nr\varrho}{(m-n)\,.\,(r+\varrho)}$$

Wenn man ferner noch $m = 3$ und $n = 2$ setzt, so bekommt man Dioptr. 21,

$$l = BF = \frac{2r\varrho}{(3-2)\,.\,(r+\varrho)}$$

$$l = \frac{2r\varrho}{1\,.\,(r+\varrho)}$$

$$l = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$$

V.

Wenn man $l = \frac{nr\varrho}{(m-n).(r+\varrho)}$ (IV, 4) hat, so ist

1) $(m-n).(r+\varrho).l = nr\varrho$

In IV, 3) hat man

$$BF = \frac{nbr\varrho}{(m-n)\,b\,(r+\varrho) - nr\varrho}$$

$$nr\varrho = (m-n).(r+\varrho).l \; (1)$$

$$BF = \frac{b\,(m-n).(r+\varrho).l}{(m-n).b.(r+\varrho) - (m-n).(r+\varrho).l}$$

$$f = BF = \frac{bl}{b-l}$$

Wenn D der strahlende Punkt in einer endlichen Entfernung = b vom Glase ist, folglich keine parallelen Strahlen auf das Glas sendet, so findet man aus dieser gegebenen Weite und der Brennweite des Glases den Sammlungspunkt f, wenn man das Produkt aus der Entfernung des strahlenden Punktes D in die Brennweite = l, durch die Differenz der Entfernung des strahlenden Punktes D und der Brennweite dividirt.

XI.

Ist l verneint, so kommt

$$f = \frac{b.-l}{b-(-l)}$$

1) $f = \frac{-bl}{b+l}$

Dieses giebt allezeit einen verneinten Quotienten, welches anzeigt, daß bei einem Hohlglase allemal ein Zerstreuungspunkt statt findet.

Dieses verneinte f ist allezeit kleiner als b; denn

$$f = \frac{-bl}{b+l} \text{ (I)}$$

oder nur itzt

$$f = \frac{bl}{b+l} = b.\frac{l}{b+l}$$

f ist kleiner als b, weil b + l größer ist als l, folglich $\frac{b}{b+l}$ kleiner als 1, daher b mit einem wahren Bruche multiplizirt werden muß, das heist, man darf b nicht völlig einmal, sondern nur ein Stück von ihm nehmen, wenn es dem f gleich seyn soll.

So ist auch f kleiner als l; denn

$$f = \frac{-bl}{b+l} \text{ (I) oder}$$

$$f = \frac{bl}{b+l} = l.\frac{b}{b+l}$$

Denn es ist b + l > b, daher $\frac{b}{b+l} < 1$, deßwegen l eben so wie vorhin b mit einem wahren Bruche multiplizirt werden muß, das f zu geben.

Ein Strahl, welcher in Fig. XI der Erl. aus G bei J auf das Hohlglaß B fiel, würde nach K gebrochen, so daß es schien, als käm er aus H. Dieser Zerstreuungspunkt für Strahlen, die von G ausführen, liegt näher nach dem Glase B zu, als der Zerstreuungspunkt f für parallele

Strahlen, und näher als G, von welchem Punkte der Axe diese Strahlen ausfahren. Denn es ist

$$f = l \cdot \frac{b}{b+l} < l, \text{ das ist}$$

$$BH = BF \cdot \frac{BG}{BG+BF} < BF$$

$$\text{und } f = b \cdot \frac{l}{b+l} < b, \text{ das ist}$$

$$BH = BG \cdot \frac{BF}{BG+BF} < BG$$

Je kleiner BG = b wird, desto kleiner wird BH = f. Denn man nehme $f = \frac{bl}{b+l} = l \cdot \frac{b}{b+l} = l \cdot \left(\frac{b}{b} + \frac{b}{b}\right)$ $= l\left(1 + \frac{b}{b}\right)$. Je kleiner b wird, desto kleiner wird $\frac{b}{l}$, folglich desto kleiner $1 + \frac{b}{l}$, oder $\frac{b}{b+l}$ oder $l \cdot \frac{b}{b+l}$ $= f$.

Wenn ein Strahl von K, dessen Richtung nach H geht, auf das Hohlglas fällt, so wird er nach G gebrochen. Käm aber ein Strahl von L in der Richtung LG auf das Glas, daß, wenn er ungebrochen durch das Glas ging, derselbe die Axe in G schnitt; so würde er nach M gebrochen. Die Entfernung des Zerstreuungspunktes also für Strahlen, welche in der Richtung LG auf B kommen, ist AB, und zwar negativ. Dieß zeigt auch die Formel. Wenn AB = f ist, und die Brennweite, oder der Zerzreuungspunkt für parallel mit der Axe einfallende Strahlen = l, so giebt, da der Strahl auf der andern Seite die Axe schneidet, BG

die negative Entfernung des strahlenden Punktes an, folglich $= -b$. Weil

$$f = \frac{bl}{b-l}, \text{ so ist hier}$$

$$f = \frac{-b \cdot -l}{-b-(-l)}$$

$$f = \frac{+bl}{-b+l} = \frac{-bl}{b-l}$$

Da $b > l$, so wird $b - l$ positiv, folglich wird eine verneinte Größe durch eine bejahte dividirt, welches einen verneinten Quotienten giebt, das ist $f =$ AB verneint.

Wenn der Strahl in der Richtung KH auf B fällt, so wird er nach G gebrochen. Ist BH $= -b < l$, so ist BG $= f$ positiv. Denn weil allezeit

$$f = \frac{b \cdot l}{b-l}, \text{ so ist}$$

$$f = \frac{-b \cdot -l}{-b-(-l)}$$

$$f = \frac{+bl}{-b+l} = \frac{+bl}{l-b}$$

Weil $b < l$, so ist $l - b$ positiv. Es wird also hier eine positive Größe durch eine positive dividirt, welches einen positiven Quotienten giebt, folglich f positiv.

VII.

Wenn AMB eine halbe Kugel ist, und die Dicke des Glases AB $= t$ (I), so darf man t im Werthe von

$B\varphi$ (II, C) nicht weglassen. Weil die beiden Halbmesser ϱ und r gleich sind, so ist hier $t = 2 . r.$ da also

$$B\varphi = \frac{mbr}{(m-n)\,b - nr} - t\ (II,\ C)$$

$$t = 2r$$

$$B\varphi = \frac{mbr}{(m-n) - nr} - 2r$$

Wenn man blos die Brennweite BF sucht, so müssen die einfallenden Strahlen parallel gehen, folglich ist $b = \infty$, daher

$$B\varphi = \frac{m \infty r}{(m-n)\infty - nr} - 2r$$

Das Produkt $(m-n)\infty$ wird unendlich groß, gegen welches $nr = 0$ ist, da das letzte ein endliches Produkt giebt; daher kann das endliche das unendlich große Produkt nicht verringern, weßwegen man nr wegläßt, und setzt

$$B\varphi = \frac{m \infty r}{(m-n)\,\infty} - 2r$$

$$B\varphi = \frac{mr}{m-n} - 2r$$

wenn man nemlich den Zähler und Nenner des Bruchs durch ∞ dividirt. Weiter ist

$$B\phi = \frac{mr - 2r \,.\, (m-n)}{m-n}$$

$$B\phi = \frac{m - 2\,(m-n)}{m-n} \,.\, r$$

$$B\phi = \frac{m - 2m + 2n}{m-n} \,.\, r$$

$$B\phi = \frac{-m + 2n}{m-n} \,.\, r$$

$$B\phi = \frac{2n - m}{m-n} \,.\, r$$

Weil BQ ein sehr kleiner Bogen seyn soll, so kann man $B\phi = Q\phi$ annehmen, folglich setzen

1) $Q\phi = \frac{2n - m}{m-n} \,.\, r$

In III, 5) ist

$$QF = \frac{\varrho \,.\, n \,.\, Q\phi}{(m-n) \,.\, Q\phi + m \,.\, \varrho}$$

$$\varrho = r$$

$$QF = \frac{r \,.\, n}{(m-n) \,.\, Q\phi + m \,.\, r} \,.\, Q\phi$$

$$Q\phi = \frac{2n - m}{m-n} \,.\, r \quad (I)$$

$$QF = \frac{r \cdot n}{(m-n) \cdot \frac{2n-m}{m-n} \cdot r + m \cdot r} \cdot \frac{2n-m}{m-n} \cdot r$$

$$QF = \frac{r \cdot n}{(2n-m) \cdot r + m \cdot r} \cdot \frac{2n-m}{m-n} \cdot r$$

$$QF = \frac{n}{2n-m+m} \cdot \frac{2n-m}{m-n} \cdot r$$

$$QF = \frac{n}{2n} \cdot \frac{2n-m}{m-n} \cdot r$$

$$QF = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2n-m}{m-n} \cdot r$$

$$QF = r \cdot \frac{2n-m}{2(m-n)}$$

Wenn man für das Brechungsgesetz $m : n = 3 : 2$ setzt, so kommt

$$QF = r \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2(3-2)}$$

$$QF = r \cdot \frac{4-3}{2 \cdot 1} = r \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} r$$

VIII.

Wenn das Glas NAMB Fig. XIII der Erl. sehr dünn, und die Halbmesser der geschliffenen Flächen ziemlich groß sind, so ist ein Stückchen der Fläche bei A und ein Stückchen der andern Fläche bei B für parallel zu halten. Ein

Strahl EA also, welcher bei A einfiel, und mit der Axe des Glases den sehr kleinen Winkel EAD machte, träf beim Ausfahren aus dem Glase die paraliele Fläche bei B, folglich würde der Strahl auch parallel ausfahren. Weil aber das Glas sehr dünn angenommen ist, so werden diese Parallelen EA und Be sehr nahe liegen, so daß sie für eine einzige Linie zu halten sind. Bei einem sehr dünnen Glase also kann man sagen: Ein Strahl, welcher bei A, der Mitte des Glases, einfällt, geht ungebrochen durch das Glas.

Auf einen Punkt außer der Axe, Dioptr. 35 u. f. wird das bisherige folgendergestalt angewandt.

IX.

Es ist Cφ in II, 6) blos durch die Verhältnißzahlen der Refraktion, die Entfernung des leuchtenden Punktes vom Glase = b, und durch den Radius der brechenden Fläche des bauchig geschliffenen Glases bestimmt. Wenn nun Fig. XII der Erl. ein leuchtender Punkt E ausser der gewöhnlichen Axe des Glases liegt, und die Strahlen blos durch die vordere Fläche des Glases NAM gebrochen werden, so ist eine Linie aus dem Mittelpunkte der brechenden Fläche in den Punkt E die Axe für alle Strahlen, welche von E auf das Glas fallen. In dieser Axe müssen sich daher alle Strahlen von E nach der Brechung wieder versammeln. Ist nun die Entfernung des Punktes D vom Glase der Entfernung des E gleich, nemlich jede = b, so muß auch Cφ = Ce seyn.

X.

In Fig. XIII. der Erl. ist

$$EA : ED = 1 : \sin EAD$$

$$\sin EAD = \frac{ED}{EA}$$

Dieser Sinus kann sehr klein seyn, wenn entweder ein Gegenstand von beträchtlicher Größe sehr weit entfernt, oder ein kleiner Gegenstand nahe ist. Daher kann man in beiden Fällen EA = AD = b setzen.

XI.

Wenn das Glas schmal ist, das heist, der Durchmesser der Breite NM in Fig. XII. der Erl. klein ist, so ist auch CB; CQ; CM nicht viel unterschieden, und können also gleich gesetzt werden. Der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche von E auf das Glas fallen, und blos von der Vorderfläche NAM gebrochen werden, ist von dem Mittelpunkte der Vorderfläche um Ce = Cφ entfernt. Dieser Punk ist also von der Hinterfläche um eS = Bφ entfernt, oder eC + CS = Cφ + CB.

XII.

Das Licht, welches in der Fig. 9, aus D auf das Glas fiel, vereinigte sich nach der doppelten Brechung bei F. Also lag dieser Punkt hinter der Hinterfläche um BF entfernt. Dieses BF = QF ist in II, 5) blos durch die Verhältnißzahlen der Refraktion, durch ρ (den Halbmesser der Hinterfläche) und Bφ bestimmt.

Vergrösserungen optischer Werkzeuge.

XV.

Wenn ein Auge sich in A (Fig. XIII. der Erl.) befindet, so sieht es den Gegenstand DE unter dem Winkel EAD. Nun stelle man in A ein Glas NAMB, dessen Brennweite AD ist, daß also der Gegenstand DE in dem Brennpunkte des Glases steht; so werden alle Strahlen, welche von D auf das Glas fallen, nach der doppelten Brechung unter einander parallel gehen. Weil D in der Axe des Glases liegt, so geht DA ungebrochen hindurch, folglich gehen alle Strahlen von D nach der Brechung mit DA parallel, das ist BF; JF mit DA parallel. Die Strahlen welche von E auf das Glas fallen, gehen ebenfalls unter sich nach der doppelten Brechung parallel fort. Weil EA angesehen werden kann, als ging er ungebrochen hindurch, (VIII) so gehen alle Strahlen, welche von E auf das Glas fallen, nach der Brechung mit EA parallel, das ist Be; Le mit EA parallel. Jede Parallele mit DA, macht mit jeder Parallele mit EA, eben den Winkel, welchen DA und EA selbst machen. Folglich sieht das Auge den Gegenstand hinter dem Glase durch Parallelen mit DA und EA welche den nemlichen Winkel mit einander machen, den DA und EA selbst machen. Es erscheint dem Auge also der Gegenstand ohne Glas und durch das Glas gleich groß.

XVI.

Das Bild pq (Fig. 16.) des Gegenstandes PQ erscheint dem Auge unter einerlei Winkel, man mag es mit blosen Augen, oder mit dem Glase B ansehen (XV), wenn nemlich pq im Brennpunkte von B liegt. Ohne Gläser aber erschien dem Auge in A der Gegenstand PQ selbst,

wovon pq das Bild ist, unter dem Winkel PAQ = pAq, weil PA ungebrochen durch das Glas geht (VIII); und da PQ sehr weit entfernt ist, so daß BA gegen die Entfernung des Gegenstandes nur gering ist, so erscheint auch dem Auge in B, der Gegenstand unter dem Winkel PAQ = pAq. Die scheinbare Größe des Gegenstandes und des Bildes verhalten sich daher wie die Winkel

$$pAq : pBq$$

Nun ist im Dreiecke Apq

$$qA : pq = 1 : \text{tang } pAq$$

$$1)\ \text{tang } pAq = \frac{pq}{qA}$$

und im Dreiecke Bqp ist auch

$$qB : pq = 1 : \text{tang } pBq$$

$$2)\ \text{tang } pBq = \frac{pq}{qB}$$

Es verhalten sich daher

$$\text{tang } pAq : \text{tang } pBq = \frac{pq}{qA}\ (1) : \frac{pq}{qB}\ (2)$$

und weil die Winkel sehr klein sind, so verhalten sich ihre Tangenten wie die Winkel selbst, daher ist

$$\text{tang } pAq : \text{tang } pBq = pAq : pBq = \frac{pq}{qA} : \frac{pq}{qB}$$

$$pAq : pBq = pq \cdot qB = pq \cdot qA$$

$$pAq : pBq = qB : qA$$

$$\frac{pAq}{pBq} = \frac{qB}{qA}$$

Wie die Weiten der farbigen Bilder von einander (Dioptr. 51.) berechnet werden.

XX.

In IV, 4) steht

$$l = \frac{nr\varrho}{(m-n).(r+\varrho)} = \frac{n}{(m-n)} \cdot \frac{r\varrho}{r+\varrho}$$

Hier setze man n = 50; m = 78 als für die Verhältnißzahlen, welche Newton für das Refraktionsgesetz der violetten Strahlen gefunden hat (Dioptr. 50, II,) Ferner setze man $\frac{r\varrho}{r+\varrho} = k$, so hat man

$$l = \frac{50}{78-70} \cdot k$$

$$l = \frac{50}{28} \cdot k$$

l ist die Brennweite, also = BV, und daher

$$3) \quad BV = \frac{50}{28} \cdot k$$

für die Brennweite des violetten Lichts.

Nun nehme man noch n = 50; m = 77 an, für das Refraktionsverhältniß des rothen Lichts (Dioptr. 50, II) so ist

$$l = \frac{n}{m-n} \cdot k$$

$$l = \frac{50}{77-50} \cdot$$

$$l = \frac{50}{27} \cdot K$$

oder weil itzt $l = BR$, so ist

$$4)\quad BR = \frac{50}{27} \cdot k$$

da $VR = BR - BV$ (p. f.), so ist

$$VR = \frac{50}{27} \cdot k\ (4) - \frac{5}{28} \cdot k\ (3)$$

$$VR = \frac{50 \cdot 28 - 50 \cdot 27}{27 \cdot 28} \cdot k$$

$$VR = \frac{50 + 50 \cdot 27 - 50 \cdot 27}{27 \cdot 28} \cdot k$$

$$VR = \frac{50}{27 \cdot 28} \cdot k = \frac{25}{14 \cdot 27} \cdot k$$

Folgende Druckfehler sind noch in der ersten Abtheilung der angewandten Mathematik des Autors, und zwar der dritten Auflage, gefunden worden.

Seite	Zeile	
5	10	von unten, statt M, m lies P, p.
7	17	von oben st. Es sei Q = P + P, Es sei Q = P + R
—	19	st. P, l. R
21	5	st. a, l. c
—	6	st. 47, l. 46

Seite	Zeile	
25 –	12	statt AV . AH, lies AV . H
26 –	3	st. AB . (Q+B+H), l. AB (Q+P+H)
27 –	1	v. u. st. gerochnen, l. gebrochnen.
28 –	1	v. u. st. entgegengesetzte, l. entgegensetzte
29 –	13	st. = P ; Q, l. P : Q
51 –	4	v. u. st. ACB, l. ACD
58 –	13	st. CLH, l. CW
59 –	7	st. CL, l. CV, und dann st. CV, l. CL
60 –	3	st. eine, Länge, l. eine der Länge
62 –	5	st. Nr. 50, l. Nr. V, 52
74 –	2	st. $\frac{4000}{653860}$, l. $\frac{4000}{6538600}$
84 –	2	v. u. st. ins Quadrat des Winkels, l. ins Quadrat des Sinus des Winkels
89 –	1	v. u. st. c . HI $\frac{c . HI}{GH}$ = c . sin V, l. $\frac{c . HI}{GL}$ = c . sin V
90 –	3	v. u. st. AH, l. CA
126 –	6	st. ABC, l. ABG
129 –	11	st. r : k, l. r : m
133 –	6	st. 5462, l. 5468
135 –	18	ist in den neuern Ausgaben der reinen Mathematik der angeführte Satz der 59. S. 4. Z.
138 –	3	st. 31, II, l. 31, VII,
— –	9	st. $\frac{m . f(g-h)}{h . (m-f)}$, l. $\frac{m . f(g-h)}{h . (g-f)}$
145 –	14	st. a, l. B
148 –	8	st. 0,4101845, l. 0,4101745
— –	10	st. 2,9130346 – 3, l. 2,9130246 – 3
— –	11	st. 0,9710115 – 1, l. 0,9710082
149 –	2	st. 70, l. 30

Seite	Zeile	
149	2	statt 35, lies 15
—	4	st. 3552, l. 4392
—	—	st. 0,2597708, l. 0,3519601
—	6	st. 2,7626209 − 3, l. 28548102 − 3
—	7	st. 0,9208736 − 1, l. 0,9516034 − 1
—	11	st. 0,051, l. 0,02044
213	11	st. Geom. 61. S. 2. Z., l. Geom. 60. S. 2. Z.
218	8	st. $(a^2 x^2) . (a^2 - x^2)$, l. $(a^2 - x^2) . (a^2 - x^2)$
223	19	st. $\frac{Sv}{ST}$; $\frac{SV}{ST}$, l. $\frac{Tv}{ST}$; $\frac{TV}{ST}$
230	4	st. (5 Fig. 32), l. 6 Fig. 32)
239	12	st. (6. 7), l. 11. 12)
241	2	v. u. st. bCD, l. bCO
245	10	st. Mfgn, l. MfgN
—	7	v. u. st. FO, l. fO
247	10	st. a . l. $(\frac{1}{2} a)$
—	11	st. 19. S. 2. Z., l. 19. S. 5. Z.
248	1	v. u. st. LH, l. LA.
251	3	st. 0,0033677, l. 0,00033677
—	7	st. V, l. IV,
268	6	v. u. st. $2r\varrho ; (r + \varrho)$, l. $2r\varrho : (r + \varrho)$ oder $\frac{2r\varrho}{r + \varrho}$
269	4	st. Planconcavglas, l. Planconvexglas
—	5	st. $= \varrho$, l. 2ϱ
273	5	v. u. st. $\frac{fl}{b - l}$, l. $\frac{fl}{f - l}$
280	1	st. (41; III), l. (40; III)
283	10	st. FC, l. BC
330	6	st. $\frac{1}{2} c . \frac{c}{n} . 1$, l. $\frac{1}{2} c . \frac{c}{n} . 1^{0}$

Seite		Zeile	
335	–	6	statt n, Picardsgrad, lies n = Picardsgrad
343	–	3	st. $133\frac{1}{3}$, l. $333\frac{1}{3}$ beide male in eben der Zeile.
350	–	2	st. HG, l. BG
—	–	10	st. (11), l. (II)
352	–	21	st. auf E, l. von E
355	–	17	st. bBq, l. pBq

Folgende Druckfehler befinden sich in der ersten Abtheilung der angewandten Mathematik der vierten Auflage.

Seite		Zeile	
5	–	7	statt M, m, lies P, p
18	–	—	st. §. 30., l. §. 39.
27	–	17	st. AB (Q+B+H), l. AB (Q+P+H)
31	–	3	st. P; Q, l. P : Q
62	–	5	v. u. st. CLH, l. CW
63	–	8	v. u. st. CL, l. CV, und st. CV, l. CL
64	–	10	v. u. st. Länge, l. der Länge
66	–	13	v. u. st. Nr. 50, l. Nr. V, 52
89	–	6	v. u. st. Quadrat des, l. Quadrat des Sinus des
95	–	9	v. u. st. AH, l. AC
136	–	17	v. u. st. ABC, l. ABG
144	–	2	st. 5462, l. 5468
147	–	19	ist der 60. S. 4. Z. der Geometrie, der 59. S. 4. Z. der neuern Ausgaben.
150	–	2	st. (31. II), l. (31. VII)
158	–	11	st. a, l. B
162	–	8	st. 0,833... l. 1,833...
—	–	10	st. 0,854... l. 2,854...
220	–	6	v. u. st. y : f, l. f : y
240	–	10	v. u. st. 61, l. 60
250	–	15	st. Sv, l. Tv, und st. SV, l. TV

Seite	Zeile	
251 –	21	statt IS, lies lS
263 –	17	st. 5,9866575, l. 5,9866571
264 –	17	st. 6,3979300, l. 6,3979400
— –	2	v. u. st. OP = OP . cot Q, l. = OQ = OP . cot Q
265 –	3	st. log OP, l. log OQ
— –	4	st. OP, l. OQ
275 –	13	v. u. st. (6. 7.), l. (11. 12.)
277 –	6	v. u. st. AC, l. AM
282 –	2	v. u. st. bCD, l. bCO
286 –	19	st. Mfgn, l. MfgN
287 –	1	st. FO, l. fO
288 –	9	v. u. st. 2. Z., l. 5. Z.
290 –	3	st. LH, l. LA
292 –	5	st. 0,0033677, l. 0,00033677
309 –	15	st. $2r\varrho ; (r+\varrho)$, l. $2r\varrho : (r+\varrho)$
— –	3	v. u. st. Plancocavglase, l. Planconvexglase
— –	2	v. u. st. ϱ, l. 2ϱ
314 –	10	st. $\frac{f.l}{b-l}$, l. $\frac{f.l}{f-l}$
320 –	1	st. 41, l. 40
323 –	7	st. FC, l. BC
394 –	17	st. $133\frac{1}{8}$, l. $333\frac{1}{3}$
394 –	18	st. $133\frac{1}{3}$, l. $333\frac{1}{3}$
402 –	8	st. HG, l. BG
— –	17	st. (11.), l. (II.)
405 –	3	st. auf, l. von
408 –	2	st. tang bBq, l. pBq.

Taf. I.

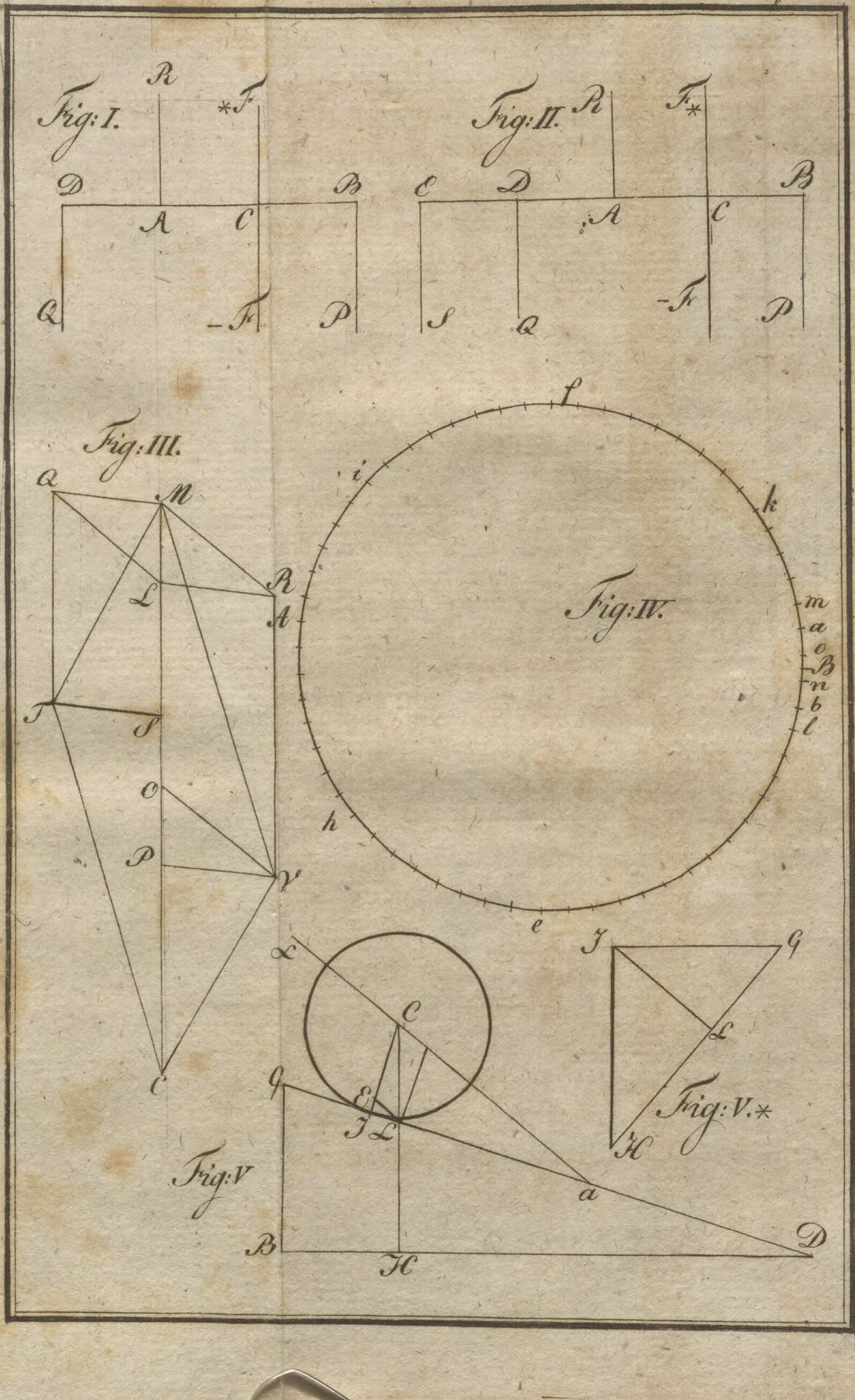


Fig: I.
R
*F
D
B
A
C
Q
-F
P
Fig: II.
R
F*
E
D
B
A
C
-F
S
Q
P
Fig: III.
Q
M
R
L
A
T
S
O
P
V
C
Fig: IV.
f
i
k
m
a
o
B
n
b
l
h
e
X
C
E
I L
q
a
B
H
D
Fig: V
I
G
L
H
Fig: V. *

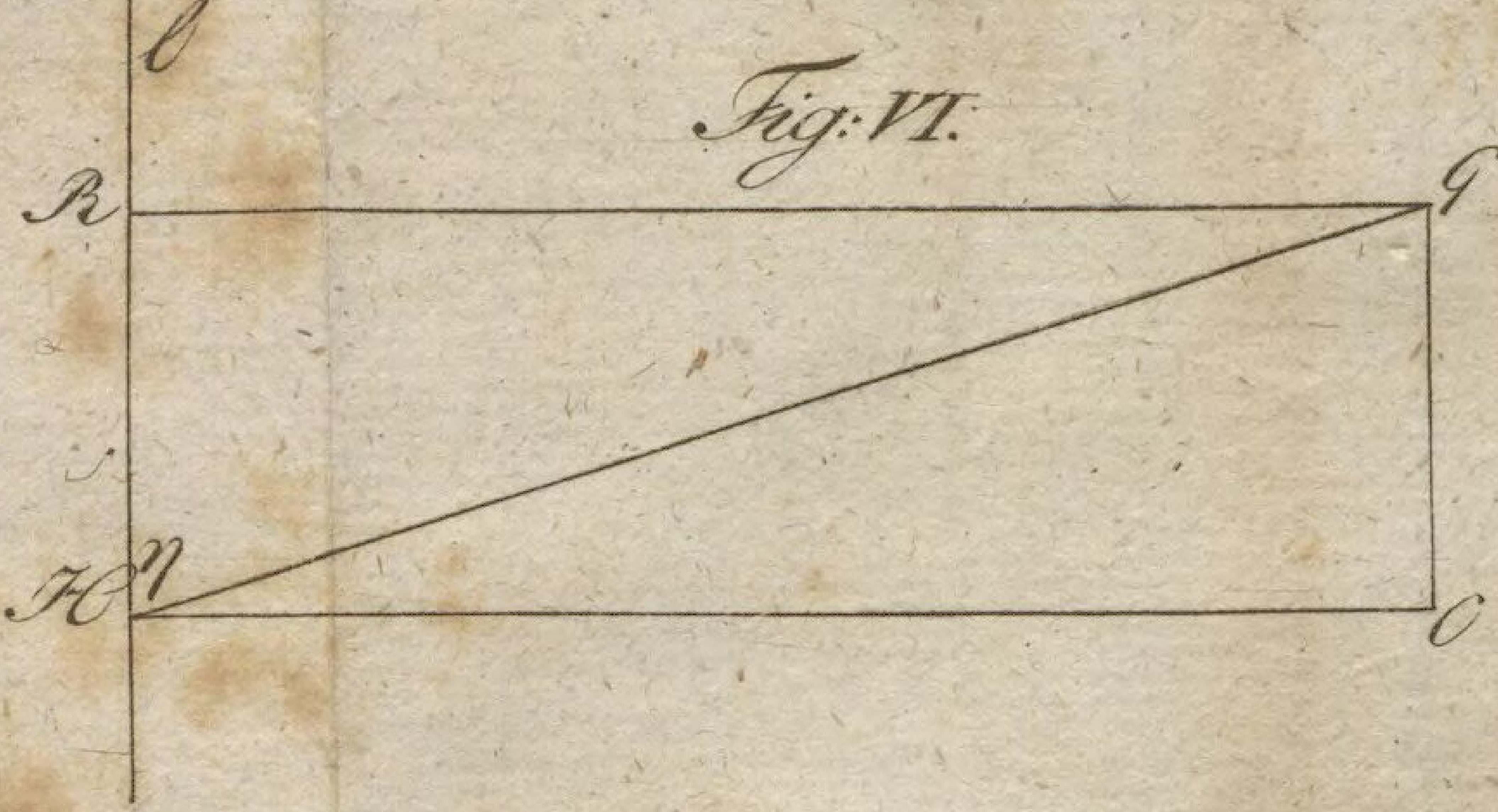


Fig: VI.

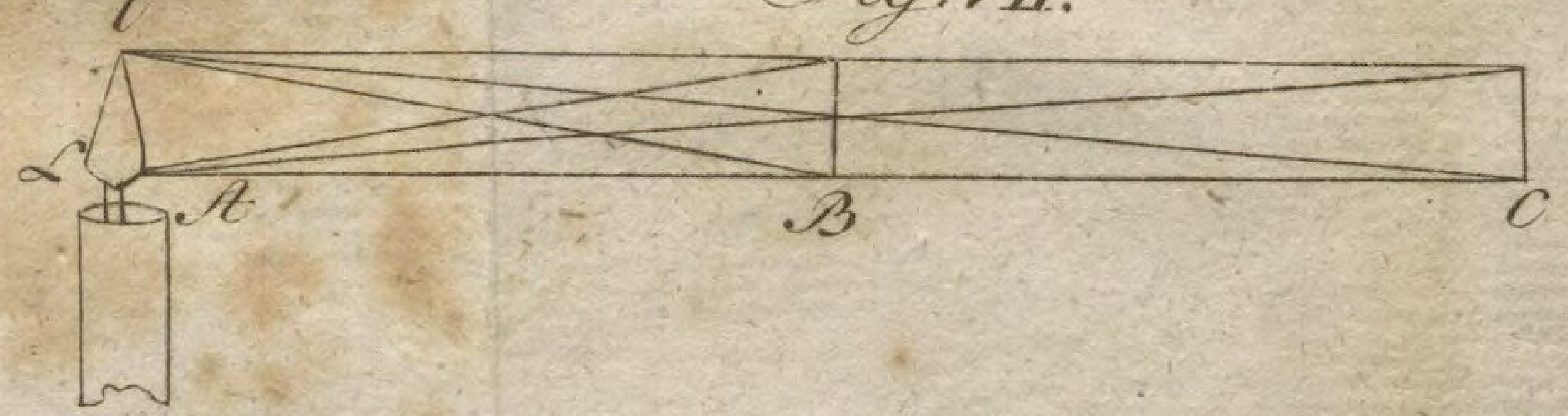


Fig: VII.

Fig: VII. *

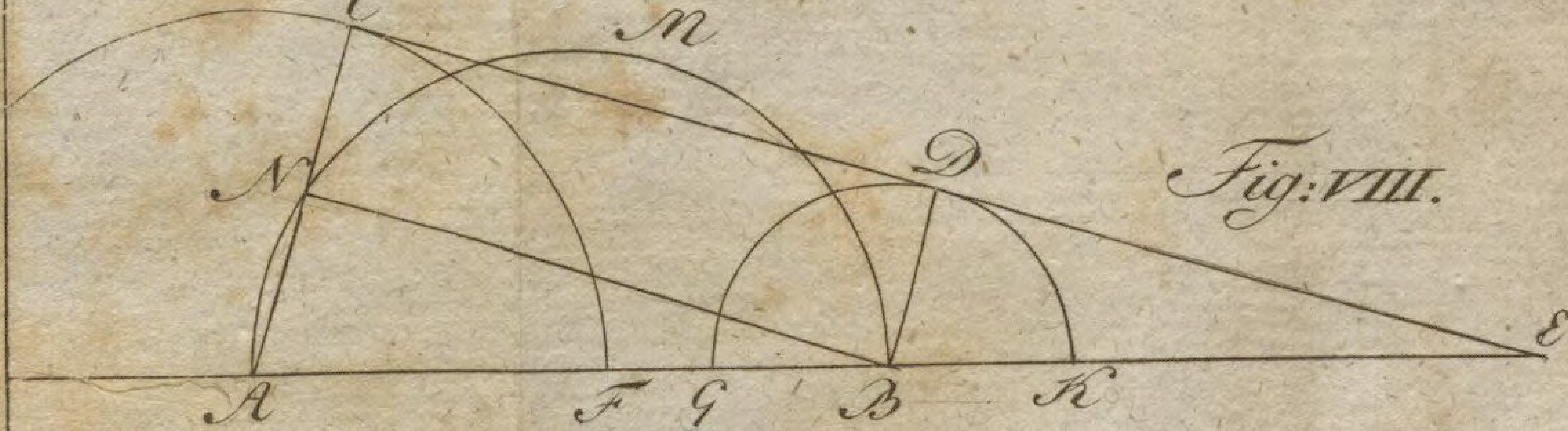


Fig: VIII.

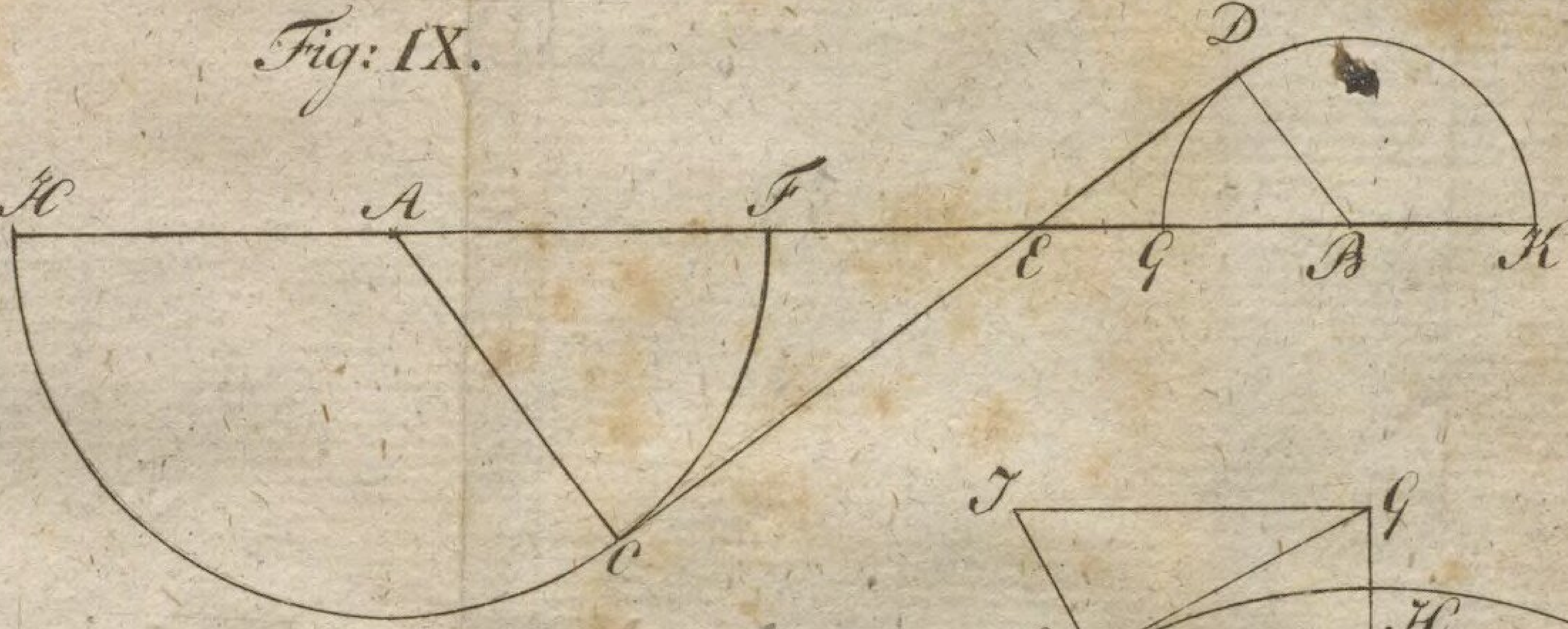


Fig: IX.

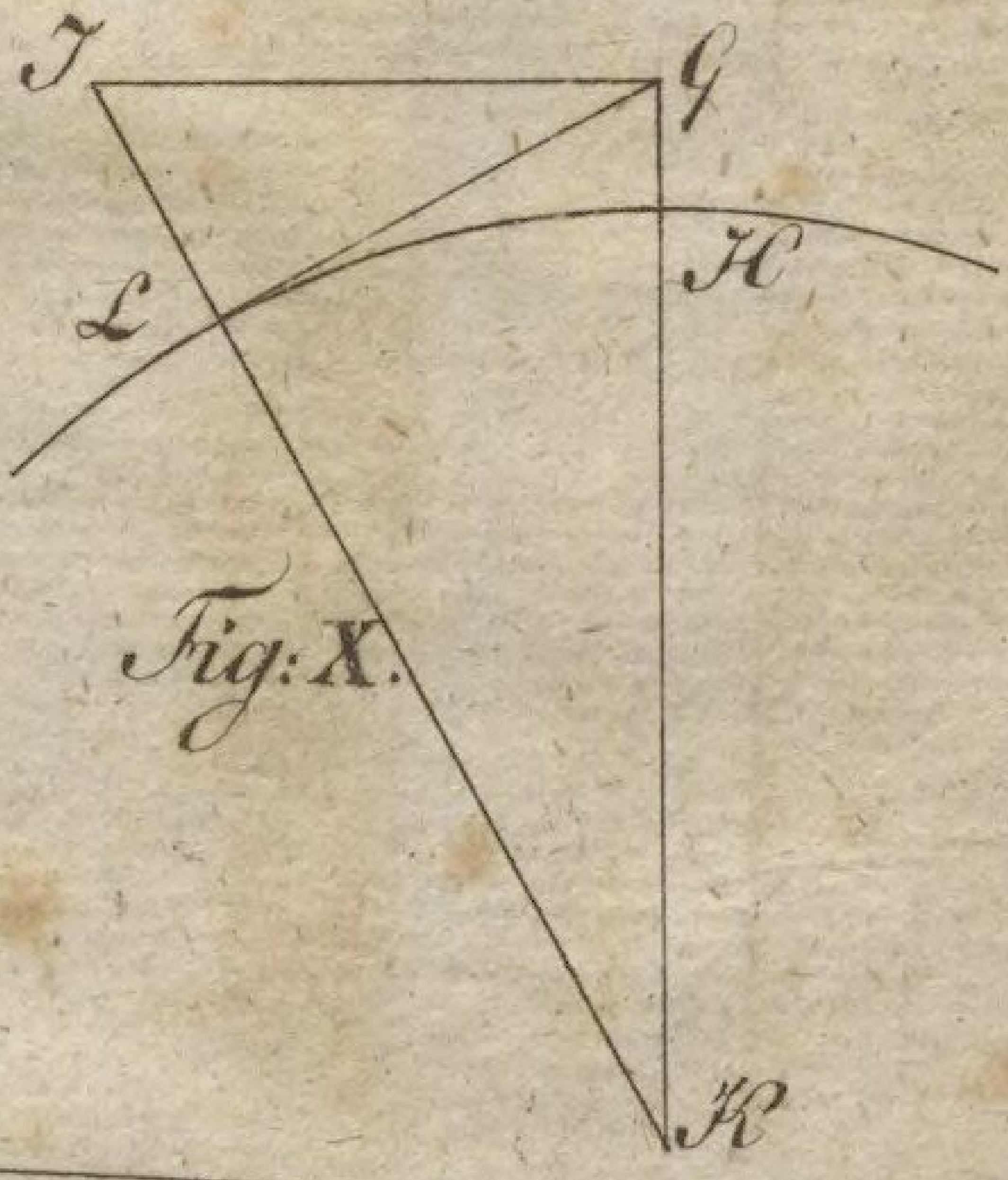
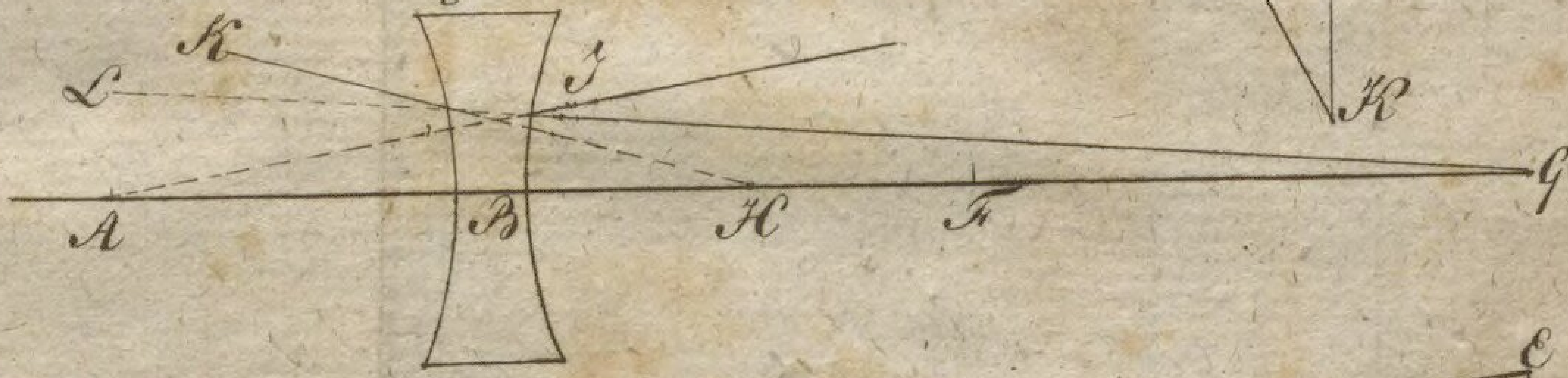


Fig: X.

Fig: XI.



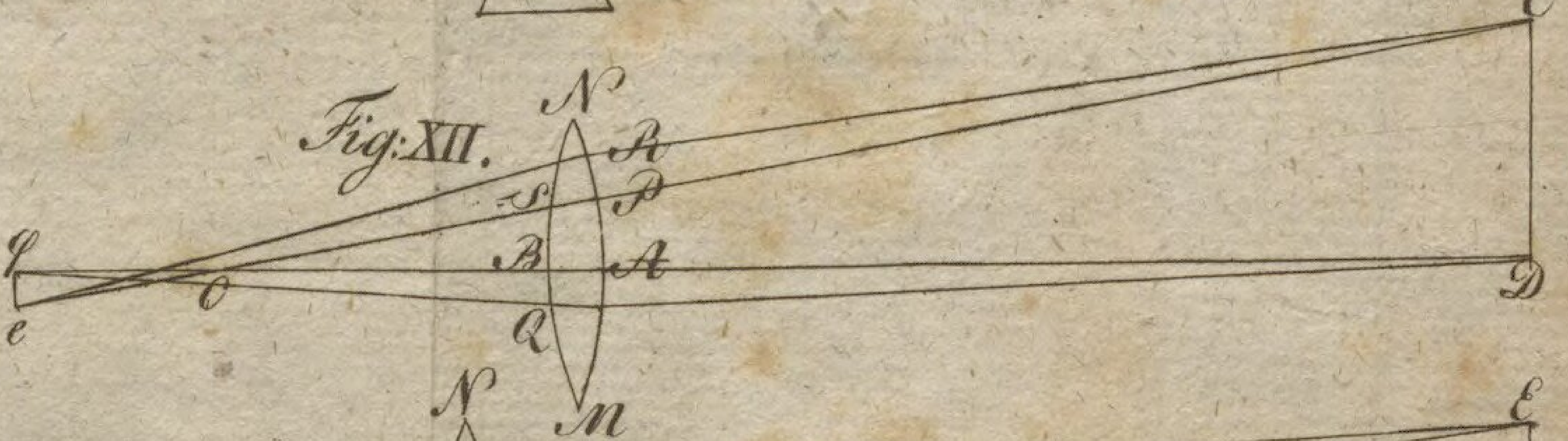


Fig: XII.

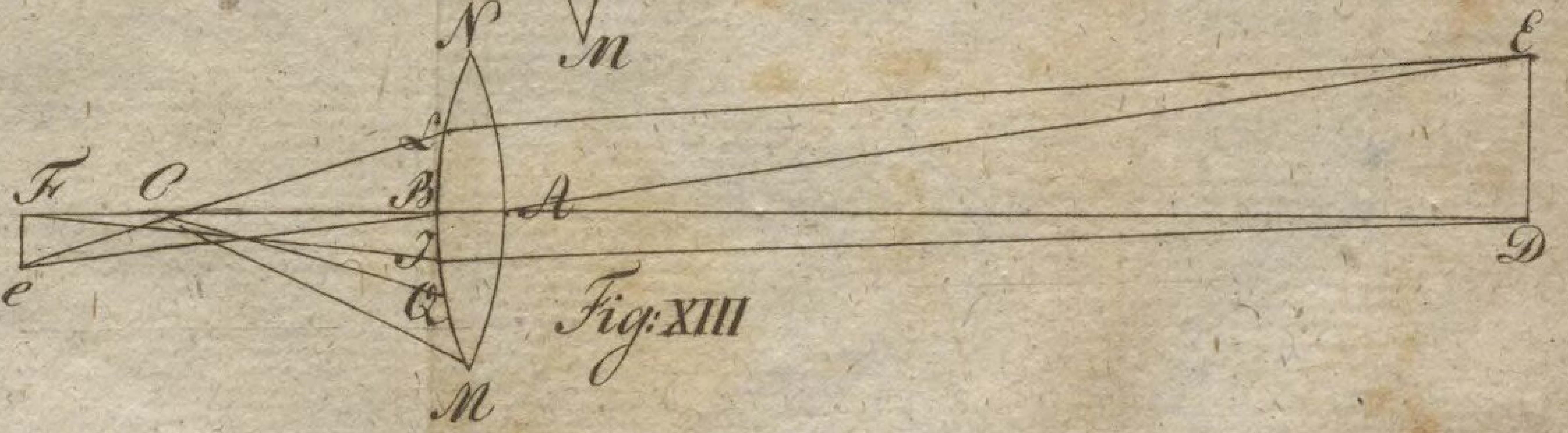


Fig: XIII

1000,-

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rücker, Christian Heinrich Ernst

Erläuterungen der Kästnerischen Anfangs-Gründe der mechanischen und optischen Wissenschaften

Leipzig 1795

Math.p. 489 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082696-4
VD18 11231491-002